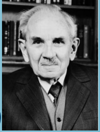
Méthodes numériques pour la mécanique des fluides

R. Eymard, Université Paris-Est

2018

Un mathématicien exceptionnel : Jean Leray (1906–1998)



Leray, Jean. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63 (1934), 193–248.

SUR LE MOUVEMENT D'UN LIQUIDE VISQUEUX EMPLISSANT L'ESPACE.[1]

Par

JEAN LERAY

à RENNES.

Introduction.[2]

I. *La théorie de la viscosité* conduit à admettre que les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier; il est nécessaire de justifier a posteriori cette hypothèse en établissant *le théorème d'existence suivant:* il existe une solution des équations de Navier qui correspond à un état de vitesse donné arbitrairement à l'instant initial. C'est ce qu'a cherché à démontrer M. Oseen[3]; il n'a réussi à établir l'existence d'une telle solution que pour une durée peut-être très brève succédant à l'instant initial. On peut vérifier en outre que l'énergie cinétique totale du liquide reste bornée[4]; mais il ne semble pas possible de déduire de ce fait que le mouvement lui-même reste régulier; j'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini[5]; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité.

et voilà les dérivées au sens faible !

(I. 16) $$\iiint_{\Pi} \left[U(y)\frac{\partial a}{\partial y_i} + U_{,i}(y)\, a(y)\right] \delta y = 0.$$

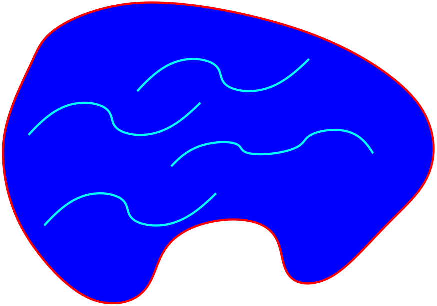
Posons à ce propos la définition suivante:

Définition des quasi-dérivées: Soient deux fonctions de carrés sommables sur Π, $U(y)$ et $U_{,i}(y)$; nous dirons que $U_{,i}(y)$ est la quasi-dérivée de $U(y)$ par rapport à y_i quand la relation (I. 16) sera vérifiée; rappelons que dans cette relation (I. 16) $a(y)$ représente une quelconque des fonctions admettant des dérivées premières continues qui sont, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur Π.

Et donc...

un fluide visqueux emplit le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou $d = 3$....

un fluide visqueux emplit le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou $d = 3$....



(vue d'artiste)

On suit une particule de fluide dans son mouvement (vision “lagrangienne”)

Conservation de la quantité de mouvement : $\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \text{somme des forces}}$

où $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ “dérivée particulaire”

On suit une particule de fluide dans son mouvement (vision “lagrangienne”)

Conservation de la quantité de mouvement : $\boxed{\rho \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \text{somme des forces}}$

où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ “dérivée particulaire”

- bilan des forces de pression donne $-\nabla p$
- bilan des forces visqueuses donne $\mu \Delta \boldsymbol{u} = (\mu \Delta u^{(1)}, \ldots, \mu \Delta u^{(d)})^t$
- forces extérieures (poids, électromagnétisme) : $\boldsymbol{f}$

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}}$$

On suit une particule de fluide dans son mouvement (vision "lagrangienne")

Conservation de la quantité de mouvement : $\boxed{\rho \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \text{somme des forces}}$

où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ "dérivée particulaire"

- bilan des forces de pression donne $-\nabla p$
- bilan des forces visqueuses donne $\mu \Delta \boldsymbol{u} = (\mu \Delta u^{(1)}, \ldots, \mu \Delta u^{(d)})^t$
- forces extérieures (poids, électromagnétisme) : $\boldsymbol{f}$

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}}$$

on se place au point $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})^t$ et on regarde passer le fluide (vision "eulérienne")

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \partial_t w(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i=1}^{d} u^{(i)}(\boldsymbol{x}, t) \partial_i w(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t w(\boldsymbol{x}, t) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) w(\boldsymbol{x}, t)}$$

Quelles équations pour le mouvement de ce fluide ?

On suit une particule de fluide dans son mouvement (vision "lagrangienne")

Conservation de la quantité de mouvement : $\boxed{\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \text{somme des forces}}$

où $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ "dérivée particulaire"

- bilan des forces de pression donne $-\nabla p$
- bilan des forces visqueuses donne $\mu\Delta\boldsymbol{u} = (\mu\Delta u^{(1)}, \ldots, \mu\Delta u^{(d)})^t$
- forces extérieures (poids, électromagnétisme) : $\boldsymbol{f}$

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}}$$

on se place au point $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})^t$ et on regarde passer le fluide (vision "eulérienne")

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \partial_t w(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i=1}^{d} u^{(i)}(\boldsymbol{x}, t)\partial_i w(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t w(\boldsymbol{x}, t) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)w(\boldsymbol{x}, t)}$$

et voilà les **équations de Navier-Stokes** !

$$\boxed{\rho(\boldsymbol{x}, t)\partial_t\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) + \rho(\boldsymbol{x}, t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) - \mu(\boldsymbol{x}, t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) \quad = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)}$$

en ajoutant la **conservation de la masse du fluide :**

$$\boxed{\partial_t\rho(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i=1}^{d}\partial_i(\rho(\boldsymbol{x}, t)u^{(i)}(\boldsymbol{x}, t)) = \partial_t\rho(\boldsymbol{x}, t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)) \quad = 0}$$

Equations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes

$$
\boxed{\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\\
\partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0
\end{aligned}}
$$

μ négligeable : **équations d'Euler** (bien adaptées aux écoulements gazeux)

$$
\boxed{\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\\
\partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0
\end{aligned}}
$$

Equations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

μ négligeable : **équations d'Euler** (bien adaptées aux écoulements gazeux)

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

écoulement **stationnaire** (ne signifie pas fluide immobile !)

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \mu(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) &= 0 \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}}$$

μ négligeable : **équations d'Euler** (bien adaptées aux écoulements gazeux)

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}}$$

écoulement **stationnaire** (ne signifie pas fluide immobile !)

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \mu(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) &= 0 \end{aligned}}$$

Equations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

μ négligeable : **équations d'Euler** (bien adaptées aux écoulements gazeux)

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

écoulement **stationnaire** (ne signifie pas fluide immobile !)

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \mu(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) &= 0 \end{aligned}$$

écoulements "lents" : on néglige les termes en $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$: **Equations de Stokes**

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

μ négligeable : **équations d'Euler** (bien adaptées aux écoulements gazeux)

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

écoulement **stationnaire** (ne signifie pas fluide immobile !)

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \mu(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) &= 0 \end{aligned}$$

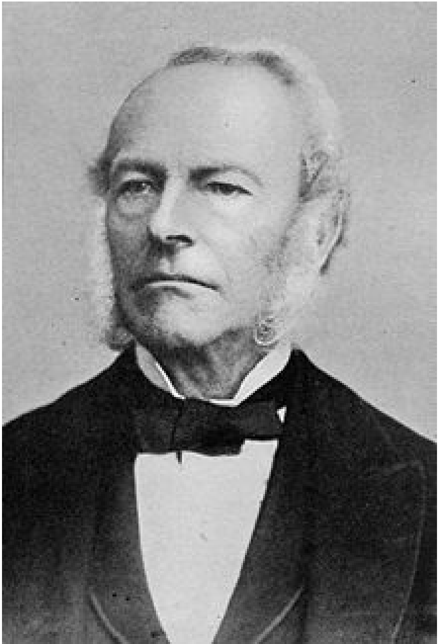
écoulements "lents" : on néglige les termes en $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$: **Equations de Stokes**

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},t)\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \mu(\boldsymbol{x},t)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) &= 0 \end{aligned}$$

suite du cours : **Equations de Stokes (puis Navier-Stokes) stationnaires**, $\rho(\boldsymbol{x},t) = 1$, μ constante

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

George Gabriel Stokes (13 août 1819 – 1er février 1903)



Problème de Stokes stationnaire

on pose $\mu = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

on pose $\mu = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3

Conditions aux limites $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ (frontière de Ω)

On mutliplie (composante par composante) par $\boldsymbol{v}^{(i)}$, fonctions régulières qui s'annulent au bord

On intègre par parties, on somme sur $i = 1, \ldots, d$

on pose $\mu = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3

Conditions aux limites $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ (frontière de Ω)

On mutliplie (composante par composante) par $\boldsymbol{v}^{(i)}$, fonctions régulières qui s'annulent au bord

On intègre par parties, on somme sur $i = 1, \ldots, d$

on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} (\nabla u^{(i)}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v^{(i)}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\partial_i v^{(i)}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} f^{(i)}(\boldsymbol{x}) v^{(i)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

on pose $\mu = 1$

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3

Conditions aux limites $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ (frontière de Ω)

On mutliplie (composante par composante) par $\boldsymbol{v}^{(i)}$, fonctions régulières qui s'annulent au bord

On intègre par parties, on somme sur $i = 1, \ldots, d$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^d (\nabla u^{(i)}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v^{(i)}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\partial_i v^{(i)}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^d f^{(i)}(\boldsymbol{x}) v^{(i)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

on notera, avec le "produit contracté"

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

on pose $\mu = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3

Conditions aux limites $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ (frontière de Ω)

On mutliplie (composante par composante) par $\boldsymbol{v}^{(i)}$, fonctions régulières qui s'annulent au bord

On intègre par parties, on somme sur $i = 1, \ldots, d$

on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} (\nabla u^{(i)}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v^{(i)}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\partial_i v^{(i)}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} f^{(i)}(\boldsymbol{x}) v^{(i)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

on notera, avec le "produit contracté"

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

Peut-on relier cette forme à quelque chose de déjà vu en cours cette année ?

on pose $\mu = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3

Conditions aux limites $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ (frontière de Ω)

On mutliplie (composante par composante) par $\boldsymbol{v}^{(i)}$, fonctions régulières qui s'annulent au bord

On intègre par parties, on somme sur $i = 1, \ldots, d$

on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} (\nabla u^{(i)}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v^{(i)}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) \partial_i v^{(i)}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} f^{(i)}(\boldsymbol{x}) v^{(i)}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

on notera, avec le "produit contracté"

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

Peut-on relier cette forme à quelque chose de déjà vu en cours cette année ?

oui dans une forme où l'on a **éliminé la pression**

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$
alors

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0\end{aligned}}$$

On pose $\boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$
alors

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Alors il existe un et un seul $\boldsymbol{u}$ solution du problème précédent.

Forme variationnelle du problème de Stokes stationnaire sans pression

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$
alors

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Alors il existe un et un seul $\boldsymbol{u}$ solution du problème précédent.

Démonstration.

$\boldsymbol{E}(\Omega)$ image réciproque d'un fermé par application continue donc espace de Hilbert

Forme variationnelle du problème de Stokes stationnaire sans pression

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$
alors

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Alors il existe un et un seul $\boldsymbol{u}$ solution du problème précédent.

Démonstration.

$\boldsymbol{E}(\Omega)$ image réciproque d'un fermé par application continue donc espace de Hilbert
$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ bilinéaire symétrique coercive continue (inégalité de Poincaré)

Forme variationnelle du problème de Stokes stationnaire sans pression

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$
alors

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Alors il existe un et un seul $\boldsymbol{u}$ solution du problème précédent.

Démonstration.

$\boldsymbol{E}(\Omega)$ image réciproque d'un fermé par application continue donc espace de Hilbert
$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ bilinéaire symétrique coercive continue (inégalité de Poincaré)
$\boldsymbol{v} \mapsto \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ forme linéaire continue

Forme variationnelle du problème de Stokes stationnaire sans pression

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$
alors

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Alors il existe un et un seul $\boldsymbol{u}$ solution du problème précédent.

Démonstration.

$\boldsymbol{E}(\Omega)$ image réciproque d'un fermé par application continue donc espace de Hilbert
$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ bilinéaire symétrique coercive continue (inégalité de Poincaré)
$\boldsymbol{v} \mapsto \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ forme linéaire continue
on applique le théorème de Riesz (car symétrique, pas besoin de Lax-Milgram). □

On aimerait appliquer une **approximation conforme**

$$\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$

On aimerait appliquer une **approximation conforme**

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$

fonctions de base $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ de $\boldsymbol{V}_h$ telles que $A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$ seulement pour un petit nombre de j à i donné (matrice A **creuse**). Alors $\boldsymbol{u}_h = \displaystyle\sum_{i\in I} u_i \boldsymbol{v}_i$ solution de

$\boxed{AU = B}$ avec $U = (u_i)_{i\in I}$ et $B = \left(\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)_{i\in I}$

On aimerait appliquer une **approximation conforme**

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \text{ tels que } \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ presque partout}\}$

fonctions de base $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ de $\boldsymbol{V}_h$ telles que $A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$ seulement pour un petit nombre de j à i donné (matrice A **creuse**). Alors $\boldsymbol{u}_h = \displaystyle\sum_{i\in I} u_i \boldsymbol{v}_i$

solution de

$\boxed{AU = B}$ avec $U = (u_i)_{i\in I}$ et $B = \left(\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)_{i\in I}$

Lemme (de Céa)

$$\boxed{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C \min_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_h} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)^d}}$$ *avec C =continuité/coercivité*

On aimerait appliquer une **approximation conforme**

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, tels que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$

fonctions de base $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ de $\boldsymbol{V}_h$ telles que $A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$ seulement pour un petit nombre de j à i donné (matrice A **creuse**). Alors $\boldsymbol{u}_h = \displaystyle\sum_{i \in I} u_i \boldsymbol{v}_i$

solution de

$$\boxed{AU = B} \quad \text{avec } U = (u_i)_{i \in I} \text{ et } B = \left(\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)_{i \in I}$$

Lemme (de Céa)

$$\boxed{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C \min_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)^d}} \quad \textit{avec } C = \textit{continuité/coercivité}$$

donc convergence de la méthode quand erreur d'interpolation tend vers 0

On aimerait appliquer une **approximation conforme**

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^d$, tels que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ presque partout$\}$

fonctions de base $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ de $\boldsymbol{V}_h$ telles que $A_{ij} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$ seulement pour un petit nombre de j à i donné (matrice A **creuse**). Alors $\boldsymbol{u}_h = \sum_{i\in I} u_i \boldsymbol{v}_i$ solution de

$\boxed{AU = B}$ avec $U = (u_i)_{i\in I}$ et $B = \left(\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)_{i\in I}$

Lemme (de Céa)

$\boxed{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0(\Omega)^d} \leq C \min_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_h} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h\|_{H^1_0(\Omega)^d}}$ *avec* C *=continuité/coercivité*

donc convergence de la méthode quand erreur d'interpolation tend vers 0

ce n'est pas gagné ! ! car trouver un espace de fonctions à support sur quelques mailles, avec divergence nulle, faut de l'inspiration....

on est obligé de réintroduire la pression pour fabriquer un espace discret... non conforme dans $\boldsymbol{E}(\Omega)$

Théorème

On pose $L^2_0(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega),$ *tels que* $\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}$. *Soit* $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. *Le problème*

$$\boxed{\begin{aligned} &\textit{trouver } (\boldsymbol{u}, p) \in H^1_0(\Omega)^d \times L^2_0(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^d, \\ &\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \textit{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega \end{aligned}}$$

possède une et une seule solution, et $\boldsymbol{u}$ *est la solution du problème "sans pression"*

Théorème

On pose $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega),$ *tels que* $\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}$. *Soit* $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. *Le problème*

$$\boxed{\begin{aligned} &\textit{trouver } (\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \\ &\qquad \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \textit{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega \end{aligned}}$$

possède une et une seule solution, et $\boldsymbol{u}$ *est la solution du problème "sans pression"*

outil essentiel pour la preuve (théorème de preuve difficile admis) :

Théorème (Nečas)

Si Ω *est un domaine lipschitzien, il existe* $C_N > 0$ *tel que, pour tout* $q \in L_0^2(\Omega)$, *il existe* $\boldsymbol{v}_N \in H_0^1(\Omega)^d$ *avec* $\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N = q$ *et* $\|\boldsymbol{v}_N\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_N \|q\|_{L^2(\Omega)}$

noter que si $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, alors $\mathrm{div}\boldsymbol{v} \in L_0^2(\Omega)$

Démonstration.

1. si le problème admet une solution, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$. Prendre $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$ implique que $\boldsymbol{u}$ est la solution du problème sans pression :

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Démonstration.

1. si le problème admet une solution, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$. Prendre $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$ implique que $\boldsymbol{u}$ est la solution du problème sans pression :

$$\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

2. Montrons maintenant l'existence de p.

on pose $X(\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Soit $q \in L^2_0(\Omega)$, et soient $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H^1_0(\Omega)^d$ tel que $\mathrm{div} \boldsymbol{v} = \mathrm{div} \boldsymbol{w} = q$ (ils existent grâce au théorème de Nečas). Alors $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$, ce qui implique

$X(\boldsymbol{v}) = X(\boldsymbol{w})$

on définit ainsi $T \ : \ q \mapsto X(\boldsymbol{v})$

Démonstration.

1. si le problème admet une solution, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$. Prendre $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$ implique que $\boldsymbol{u}$ est la solution du problème sans pression :

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

2. Montrons maintenant l'existence de p.

on pose $X(\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Soit $q \in L^2_0(\Omega)$, et soient $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H^1_0(\Omega)^d$ tel que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = q$ (ils existent grâce au théorème de Nečas). Alors $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$, ce qui implique

$X(\boldsymbol{v}) = X(\boldsymbol{w})$

on définit ainsi $T \ : \ q \mapsto X(\boldsymbol{v})$

3. On choisit $\boldsymbol{v}_N$ donné par théorème de Nečas. Alors la forme linéaire T vérifie

$$|T(q)| \leq (\|\boldsymbol{u}\|_{H^1_0} + \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2})\|\boldsymbol{v}_N\|_{H^1_0} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$$

donc T est continue sur $L^2_0(\Omega)$. Par théorème de Riesz, il existe un et un seul $p \in L^2_0(\Omega)$ tel que $T(q) = \displaystyle\int_\Omega p(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Démonstration.

1. si le problème admet une solution, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$. Prendre $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$ implique que $\boldsymbol{u}$ est la solution du problème sans pression :

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

2. Montrons maintenant l'existence de p.
on pose $X(\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.
Soit $q \in L^2_0(\Omega)$, et soient $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H^1_0(\Omega)^d$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \mathrm{div}\boldsymbol{w} = q$ (ils existent grâce au théorème de Nečas). Alors $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$, ce qui implique
$X(\boldsymbol{v}) = X(\boldsymbol{w})$
on définit ainsi $T \ : \ q \mapsto X(\boldsymbol{v})$
3. On choisit $\boldsymbol{v}_N$ donné par théorème de Nečas. Alors la forme linéaire T vérifie

$$|T(q)| \leq (\|\boldsymbol{u}\|_{H^1_0} + \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2})\|\boldsymbol{v}_N\|_{H^1_0} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$$

donc T est continue sur $L^2_0(\Omega)$. Par théorème de Riesz, il existe un et un seul $p \in L^2_0(\Omega)$ tel que $T(q) = \displaystyle\int_\Omega p(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.
4. Pour tout $\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^d$, on a alors

$$\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = T(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) = \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

$\square$

Théorème de Nečas et condition "inf-sup"

Lemme

Si Ω domaine lipschitzien, on a

$$\boxed{\forall q \in L^2_0(\Omega), \quad \sup_{v \in H^1_0(\Omega)^d \setminus \{0\}} \int_\Omega q \,\mathrm{div}\, v \,\mathrm{d}x \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1_0} \qquad \text{avec } \beta = 1/C_N}$$

Lemme

Si Ω domaine lipschitzien, on a

$$\boxed{\forall q \in L^2_0(\Omega), \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^d \setminus \{0\}} \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1_0} \qquad \text{avec } \beta = 1/C_N}$$

Démonstration.

On choisit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_N$. On a $\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|q\|^2_{L^2(\Omega)}$, et $\|\boldsymbol{v}_N\|_{H^1_0(\Omega)^d} \leq C_N \|q\|_{L^2(\Omega)}$ permet de conclure.

□

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{trouver } (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h, \\ \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \\ \forall q \in Q_h, \int_\Omega q(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \end{aligned}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$
(on ne demande pas $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega)$ ce qui est plus facile mais on verra que $\boldsymbol{V}_h$ et Q_h ne sont pas indépendants)

$$
\begin{aligned}
&\text{trouver } (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\\
&\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x},\\
&\forall q \in Q_h,\ \int_\Omega q(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0
\end{aligned}
$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset H^1_0(\Omega)^d$ et $Q_h \subset L^2_0(\Omega)$

(on ne demande pas $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega)$ ce qui est plus facile mais on verra que $\boldsymbol{V}_h$ et Q_h ne sont pas indépendants)

Noter que le schéma revient à résoudre $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, et $B_{ik} = -\displaystyle\int_\Omega q_k(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{trouver } (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h, \\ &\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \\ &\forall q \in Q_h, \int_\Omega q(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \end{aligned}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$
(on ne demande pas $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{E}(\Omega)$ ce qui est plus facile mais on verra que $\boldsymbol{V}_h$ et Q_h ne sont pas indépendants)

Noter que le schéma revient à résoudre $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, et $B_{ik} = -\displaystyle\int_\Omega q_k(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

Problèmes à étudier :

1. existence et unicité de la solution discrète
2. convergence de cette solution discrète
3. comment la trouver en pratique, par exemple algorithme d'Uzawa : $P^{(k+1)} = \lambda B^t U^{(k)}$ puis $U^{(k+1)} = A^{-1}(F - BP^{(k+1)})$ (problème important, non traité dans ce cours)

Existence et unicité solution discrète

Lemme

sous la condition **inf-sup** *: il existe $\beta_h > 0$ tel que*

$$\boxed{\forall \boldsymbol{q} \in Q_h, \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \setminus \{0\}} \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|\boldsymbol{q}\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1},}$$

le système linéaire admet une et une seule solution

Lemme

sous la condition **inf-sup** *: il existe $\beta_h > 0$ tel que*

$$\boxed{\forall q \in Q_h, \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \setminus \{0\}} \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|q\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1},}$$

le système linéaire admet une et une seule solution

Démonstration.

on pose $\boxed{\widetilde{\boldsymbol{V}}_h = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \text{ tels que } \forall q \in Q_h, \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}.}$ alors $\boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$ solution de

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \ \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

dont l'unicité est donnée par le théorème de Riesz.

Existence et unicité solution discrète

Lemme

sous la condition **inf-sup** *: il existe $\beta_h > 0$ tel que*

$$\boxed{\forall q \in Q_h, \quad \sup_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_h\setminus\{0\}} \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|q\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1_0},}$$

le système linéaire admet une et une seule solution

Démonstration.

on pose $\boxed{\widetilde{\boldsymbol{V}}_h = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \text{ tels que } \forall q \in Q_h, \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}.}$ alors $\boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$ solution de

$$\boxed{\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \ \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

dont l'unicité est donnée par le théorème de Riesz.
La condition inf-sup implique que $\Pi_{|Q_h}(\operatorname{div}(\boldsymbol{V}_h)) = Q_h$ ($\Pi_{|Q_h}$ projection orthogonale pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. En effet, si p dans l'orthogonal de $\Pi_{|Q_h}(\operatorname{div}(\boldsymbol{V}_h))$, il existe $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \setminus \{0\}$ tel que $\displaystyle\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \geq \beta_h \|p\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1_0}$, donc $p = 0$. On a donc une propriété discrète analogue au théorème de Nečas.
On conclut à l'existence et l'unicité de $p \in Q_h$ comme pour le problème continu. $\square$

Théorème

Sous la condition inf-sup, la solution du schéma vérifie

$$\boxed{\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}+\|p-p_h\|_{L^2}\leq C\big(\inf_{\overline{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{V}_h}\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|_{H^1_0}+\inf_{\overline{p}_h\in Q_h}\|\overline{p}_h-p\|_{L^2}\big)}$$

avec C qui dépend de manière croissante de $1/\beta_h$.

Convergence du schéma avec pression sous la condition inf-sup

Théorème

Sous la condition inf-sup, la solution du schéma vérifie

$$\boxed{\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1}+\|p-p_h\|_{L^2}\leq C\big(\inf_{\overline{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{V}_h}\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|_{H_0^1}+\inf_{\overline{p}_h\in Q_h}\|\overline{p}_h-p\|_{L^2}\big)}$$

avec C qui dépend de manière croissante de $1/\beta_h$.

Démonstration.

on fait la différence des deux formulations faibles avec $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h\subset H_0^1(\Omega)^d$ comme fonction test. On obtient

$$\int_\Omega\big((\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}_h):\nabla\boldsymbol{v}+(p_h-p)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

Théorème

Sous la condition inf-sup, la solution du schéma vérifie

$$\boxed{\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}+\|p-p_h\|_{L^2}\leq C\big(\inf_{\overline{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{V}_h}\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|_{H^1_0}+\inf_{\overline{p}_h\in Q_h}\|\overline{p}_h-p\|_{L^2}\big)}$$

avec C qui dépend de manière croissante de $1/\beta_h$.

Démonstration.

on fait la différence des deux formulations faibles avec $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h\subset H^1_0(\Omega)^d$ comme fonction test. On obtient

$$\int_\Omega\big((\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}_h):\nabla\boldsymbol{v}+(p_h-p)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

On introduit des fonctions $\overline{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{V}_h$ et $\overline{p}_h\in Q_h$ et on note $\varepsilon_h=\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|_{H^1_0}+\|\overline{p}_h-p\|_{L^2}$. On obtient

$$\int_\Omega(\nabla\overline{\boldsymbol{u}}_h-\nabla\boldsymbol{u}_h):\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega(p_h-\overline{p}_h)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leq\varepsilon_h\|\boldsymbol{v}\|_{H^1_0}.$$

Théorème

Sous la condition inf-sup, la solution du schéma vérifie

$$\boxed{\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}+\|p-p_h\|_{L^2}\leq C\big(\inf_{\overline{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{V}_h}\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|_{H^1_0}+\inf_{\overline{p}_h\in Q_h}\|\overline{p}_h-p\|_{L^2}\big)}$$

avec C qui dépend de manière croissante de $1/\beta_h$.

Démonstration.

on fait la différence des deux formulations faibles avec $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h\subset H^1_0(\Omega)^d$ comme fonction test. On obtient

$$\int_\Omega\big((\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}_h):\nabla\boldsymbol{v}+(p_h-p)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

On introduit des fonctions $\overline{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{V}_h$ et $\overline{p}_h\in Q_h$ et on note $\varepsilon_h=\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|_{H^1_0}+\|\overline{p}_h-p\|_{L^2}$. On obtient

$$\int_\Omega(\nabla\overline{\boldsymbol{u}}_h-\nabla\boldsymbol{u}_h):\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega(p_h-\overline{p}_h)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leq\varepsilon_h\|\boldsymbol{v}\|_{H^1_0}.$$

Par hypothèse inf-sup discret, on choisit $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\beta$ tel que $\|\boldsymbol{v}_\beta\|_{H^1_0}=1$ et

$$\int_\Omega(p_h-\overline{p}_h)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}_\beta\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geq\beta_h\|p_h-\overline{p}_h\|_{L^2}.$$

On obtient $\|p_h-\overline{p}_h\|_{L^2}\leq\dfrac{\varepsilon_h}{\beta_h}+\dfrac{\|\overline{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}}{\beta_h}$. □

suite.

On pose maintenant $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h$.

Le schéma donne $\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $q \in Q_h$, et donc

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} + \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0},$$

suite.

On pose maintenant $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h$.

Le schéma donne $\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $q \in Q_h$, et donc

$\displaystyle\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1}^2 + \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1}$,

ceci implique, puisque $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$,

$\displaystyle\int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$donc

$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}\|_{H_0^1}^2 \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} + \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$.

suite.

On pose maintenant $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h$.

Le schéma donne $\displaystyle\int_\Omega q \mathrm{div} \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $q \in Q_h$, et donc

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} + \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \ \mathrm{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0},$$

ceci implique, puisque $\mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0$,

$$\int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \ \mathrm{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \ \mathrm{div}(\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2} \text{donc}$$

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}\|^2_{H^1_0} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} + \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}.$$

et donc au moyen de l'inégalité sur $\|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$,

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} + \varepsilon_h \left(\frac{\varepsilon_h}{\beta_h} + \frac{\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}}{\beta_h} \right).$$

suite.

On pose maintenant $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h$.
Le schéma donne $\displaystyle\int_\Omega q \mathrm{div} \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $q \in Q_h$, et donc
$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} + \displaystyle\int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \, \mathrm{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}$,
ceci implique, puisque $\mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0$,
$\displaystyle\int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \, \mathrm{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \, \mathrm{div}(\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$ donc
$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}\|^2_{H^1_0} \le \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} + \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$.
et donc au moyen de l'inégalité sur $\|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$,

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} \le \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} + \varepsilon_h \left(\frac{\varepsilon_h}{\beta_h} + \frac{\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}}{\beta_h} \right).$$

En appliquant l'inégalité d'Young $ab \le \dfrac{1}{2\alpha} a^2 + \dfrac{\alpha}{2} b^2$, on obtient ainsi l'existence d'une valeur $C > 0$, croissante avec $1/\beta_h$, telle que
$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} \le C\varepsilon_h$.
On conclut avec l'inégalité sur $\|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$.

suite.

On pose maintenant $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h$.

Le schéma donne $\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $q \in Q_h$, et donc

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} + \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0},$$

ceci implique, puisque $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$,

$\displaystyle\int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{u}}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$ donc

$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}\|^2_{H^1_0} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} + \varepsilon_h \|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$.

et donc au moyen de l'inégalité sur $\|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$,

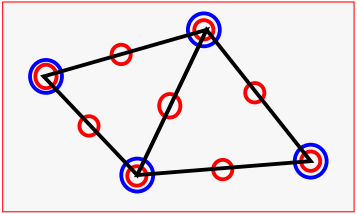
$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|^2_{H^1_0} \leq \varepsilon_h \|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} + \varepsilon_h \left(\frac{\varepsilon_h}{\beta_h} + \frac{\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0}}{\beta_h} \right).$$

En appliquant l'inégalité d'Young $ab \leq \dfrac{1}{2\alpha} a^2 + \dfrac{\alpha}{2} b^2$, on obtient ainsi l'existence d'une valeur $C > 0$, croissante avec $1/\beta_h$, telle que

$\|\overline{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} \leq C\varepsilon_h$.

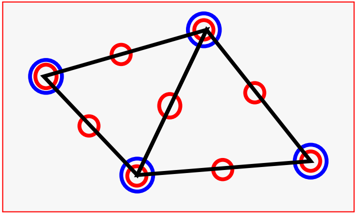
On conclut avec l'inégalité sur $\|p_h - \overline{p}_h\|_{L^2}$.

$\square$



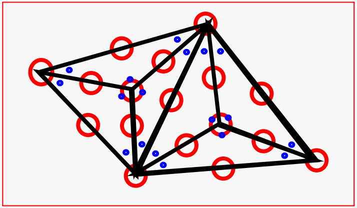
Taylor–Hood

1. vitesses approchées par fonctions $(P_2)^2$ par morceau et continues ◯
2. pressions approchées par fonctions P_1 par morceau et continues ◯



Taylor–Hood

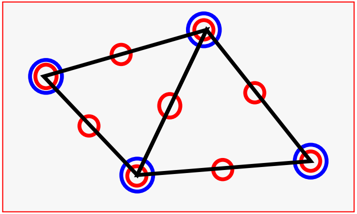
1. vitesses approchées par fonctions $(P_2)^2$ par morceau et continues ◯
2. pressions approchées par fonctions P_1 par morceau et continues ◯



Scott–Vogelius conforme dans $\boldsymbol{E}(\Omega)$

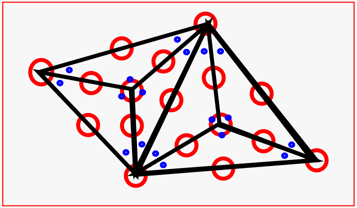
1. vitesses approchées par fonctions $(P_2)^2$ par morceau et continues ◯
2. pressions approchées par fonctions P_1 par morceau non continues ◯

Exemples de choix d'espaces discrets satisfaisant la condition inf-sup



Taylor–Hood

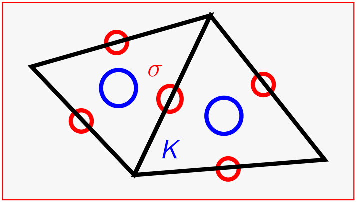
1. vitesses approchées par fonctions $(P_2)^2$ par morceau et continues $\bigcirc$
2. pressions approchées par fonctions P_1 par morceau et continues $\bigcirc$



Scott–Vogelius conforme dans $\boldsymbol{E}(\Omega)$

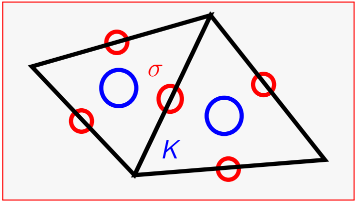
1. vitesses approchées par fonctions $(P_2)^2$ par morceau et continues $\bigcirc$
2. pressions approchées par fonctions P_1 par morceau non continues $\bigcirc$

Preuves condition inf-sup à retrouver dans Brezzi-Fortin par exemple



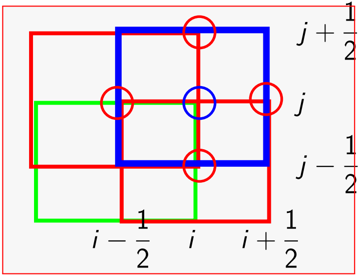
Crouzeix-Raviart

1. vitesses P_1 non conformes ◯
2. pressions P_0 par morceau ◯



Crouzeix-Raviart

1. vitesses P_1 non conformes ◯
2. pressions P_0 par morceau ◯



"Marker-And-Cell" (MAC) (Harlow and Welch, 1965

1. vitesses normales aux arêtes
2. pressions

idée lumineuse.... mais en 2D seulement ! ! ! ! !
pour tout champ de vitesse tel que $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, on peut poser $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\partial_2\varphi(\boldsymbol{x}), -\partial_1\varphi(\boldsymbol{x}))^t$ (on appelle φ le "potentiel d'écoulement") (vitesse tangente aux isovaleurs de φ qui donnent ainsi les lignes de courant)

la condition $\boldsymbol{v} = 0$ sur le bord se traduit par $\varphi = 0$ et $\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ au bord.
mais le problème est-il toujours le même ainsi formulé ?

idée lumineuse.... mais en 2D seulement ! ! ! ! !
pour tout champ de vitesse tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$, on peut poser $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\partial_2\varphi(\boldsymbol{x}), -\partial_1\varphi(\boldsymbol{x}))^t$ (on appelle φ le "potentiel d'écoulement") (vitesse tangente aux isovaleurs de φ qui donnent ainsi les lignes de courant)
la condition $\boldsymbol{v} = 0$ sur le bord se traduit par $\varphi = 0$ et $\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ au bord.
mais le problème est-il toujours le même ainsi formulé ?

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (\partial^2_{11}\varphi\partial^2_{11}\psi + 2\partial^2_{12}\varphi\partial^2_{12}\psi + \partial^2_{22}\varphi\partial^2_{22}\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

et pour des fonctions $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \partial^2_{12}\varphi\partial^2_{12}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \partial^3_{112}\varphi\partial_2\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial^2_{11}\varphi\partial^2_{22}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial^2_{22}\varphi\partial^2_{11}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

idée lumineuse.... mais en 2D seulement ! ! ! ! !
pour tout champ de vitesse tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$, on peut poser $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\partial_2\varphi(\boldsymbol{x}), -\partial_1\varphi(\boldsymbol{x}))^t$ (on appelle φ le "potentiel d'écoulement") (vitesse tangente aux isovaleurs de φ qui donnent ainsi les lignes de courant)
la condition $\boldsymbol{v} = 0$ sur le bord se traduit par $\varphi = 0$ et $\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ au bord.
mais le problème est-il toujours le même ainsi formulé ?

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (\partial^2_{11}\varphi\partial^2_{11}\psi + 2\partial^2_{12}\varphi\partial^2_{12}\psi + \partial^2_{22}\varphi\partial^2_{22}\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

et pour des fonctions $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \partial^2_{12}\varphi\partial^2_{12}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \partial^3_{112}\varphi\partial_2\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial^2_{11}\varphi\partial^2_{22}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial^2_{22}\varphi\partial^2_{11}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

trouver $\varphi \in H^2_0(\Omega)$, $\forall\psi \in H^2_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega (f^{(1)}(\boldsymbol{x})\partial_2\psi(\boldsymbol{x}) - f^{(2)}(\boldsymbol{x})\partial_1\psi(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

avec $H^2_0(\Omega) = \{\psi \in H^2(\Omega)$, tels que $\psi = \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega\} = \overline{C_c^\infty(\Omega)}_{|H^2(\Omega)}$.

idée lumineuse.... mais en 2D seulement ! ! ! ! !
pour tout champ de vitesse tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$, on peut poser $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\partial_2\varphi(\boldsymbol{x}), -\partial_1\varphi(\boldsymbol{x}))^t$ (on appelle φ le "potentiel d'écoulement") (vitesse tangente aux isovaleurs de φ qui donnent ainsi les lignes de courant)
la condition $\boldsymbol{v} = 0$ sur le bord se traduit par $\varphi = 0$ et $\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ au bord.
mais le problème est-il toujours le même ainsi formulé ?

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (\partial^2_{11}\varphi\partial^2_{11}\psi + 2\partial^2_{12}\varphi\partial^2_{12}\psi + \partial^2_{22}\varphi\partial^2_{22}\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

et pour des fonctions $\varphi, \psi \in C^\infty_c(\Omega)$,

$$\int_\Omega \partial^2_{12}\varphi\partial^2_{12}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \partial^3_{112}\varphi\partial_2\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial^2_{11}\varphi\partial^2_{22}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial^2_{22}\varphi\partial^2_{11}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

trouver $\varphi \in H^2_0(\Omega)$, $\forall\psi \in H^2_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (f^{(1)}(\boldsymbol{x})\partial_2\psi(\boldsymbol{x}) - f^{(2)}(\boldsymbol{x})\partial_1\psi(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

avec $H^2_0(\Omega) = \{\psi \in H^2(\Omega)$, tels que $\psi = \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega\} = \overline{C^\infty_c(\Omega)}_{|H^2(\Omega)}$.

forme forte : $\boxed{\Delta\Delta\varphi = -\partial_2 f^{(1)} + \partial_1 f^{(2)}}$ avec $\varphi = 0$ et $\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ au bord

problème biharmonique ou bilaplacien, ne se résout pas avec deux laplaciens de suite car pas de conditions aux limites sur le premier laplacien

Problème de Stokes avec inconnue "potentiel d'écoulement" : un problème elliptique

Lemme

la forme bilinéaire $a \; : \; H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $(\varphi, \psi) \mapsto \int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ *est bilinéaire symétrique continue coercive*

Lemme

la forme bilinéaire a $: \; H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}, \; (\varphi, \psi) \mapsto \int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ *est bilinéaire symétrique continue coercive*

Démonstration.

inégalité de Poincaré $\boxed{\forall u \in H_0^1(\Omega), \; \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}}$ et

$\boxed{\forall u \in H_0^2(\Omega), \; -\int_\Omega u\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x}$ impliquent

$\boxed{\forall u \in H_0^2(\Omega), \; \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.}$ et on a par intégration par parties

$$\boxed{\begin{aligned}&\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\\ &\int_\Omega (\Delta\varphi(x))^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega \partial_{ii}^2\varphi(x)\partial_{jj}^2\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega (\partial_{ij}^2\varphi(x))^2 \mathrm{d}x\end{aligned}}$$

donc équivalence de *a* avec norme $H^2(\Omega)$ □

Approximation du problème de Stokes avec inconnue "potentiel d'écoulement"

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\text{trouver } \varphi \in W_h,\ \forall \psi \in W_h,\\
&\qquad \int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad = \int_\Omega (f^{(1)}(\boldsymbol{x})\partial_2\psi(\boldsymbol{x}) - f^{(2)}(\boldsymbol{x})\partial_1\psi(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}}
$$

avec $W_h \subset H_0^2(\Omega)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{trouver } \varphi \in W_h,\ \forall \psi \in W_h,\\ &\int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (f^{(1)}(\boldsymbol{x})\partial_2\psi(\boldsymbol{x}) - f^{(2)}(\boldsymbol{x})\partial_1\psi(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}}$$

avec $W_h \subset H_0^2(\Omega)$

en 1D : éléments finis de classe H^2 : maillage $(]ih,(i+1)h[)_{i=1,\dots,n}$: polynômes du 3e degré par morceau, raccords de classe C^1
$\varphi_i^{(1)}(ih) = 1$, $\varphi_i^{(1)}(jh) = 0$ si $j \neq i$, $(\varphi_i^{(1)})'(jh) = 0$ pour tout j
$(\varphi_i^{(2)})'(ih) = 1$, $(\varphi_i^{(1)})'(jh) = 0$ si $j \neq i$, $\varphi_i^{(1)}(jh) = 0$ pour tout j

trouver $\varphi \in W_h,\ \forall \psi \in W_h,$

$$\int_\Omega \Delta\varphi(\boldsymbol{x})\Delta\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (f^{(1)}(\boldsymbol{x})\partial_2\psi(\boldsymbol{x}) - f^{(2)}(\boldsymbol{x})\partial_1\psi(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

avec $W_h \subset H^2_0(\Omega)$

en 1D : éléments finis de classe H^2 : maillage $(]ih,(i+1)h[)_{i=1,\dots,n}$: polynômes du 3e degré par morceau, raccords de classe C^1

$\varphi_i^{(1)}(ih) = 1$, $\varphi_i^{(1)}(jh) = 0$ si $j \neq i$, $(\varphi_i^{(1)})'(jh) = 0$ pour tout j

$(\varphi_i^{(2)})'(ih) = 1$, $(\varphi_i^{(1)})'(jh) = 0$ si $j \neq i$, $\varphi_i^{(1)}(jh) = 0$ pour tout j

en 2D, Ω carré, maillage $(]ih,(i+1)h[\times]jh,(j+1)h[)_{i,j=1,\dots,n}$:

$(x_1,x_2) \mapsto \varphi_i^{(k)}(x_1)\varphi_j^{(l)}(x_2)$

$$\text{trouver } \varphi \in W_h,\ \forall \psi \in W_h,$$
$$\int_\Omega \Delta\varphi(\mathbf{x})\Delta\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega (f^{(1)}(\mathbf{x})\partial_2\psi(\mathbf{x}) - f^{(2)}(\mathbf{x})\partial_1\psi(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}$$

avec $W_h \subset H_0^2(\Omega)$

en 1D : éléments finis de classe H^2 : maillage $(]ih,(i+1)h[)_{i=1,\ldots,n}$: polynômes du 3e degré par morceau, raccords de classe C^1
$\varphi_i^{(1)}(ih) = 1$, $\varphi_i^{(1)}(jh) = 0$ si $j \neq i$, $(\varphi_i^{(1)})'(jh) = 0$ pour tout j
$(\varphi_i^{(2)})'(ih) = 1$, $(\varphi_i^{(1)})'(jh) = 0$ si $j \neq i$, $\varphi_i^{(1)}(jh) = 0$ pour tout j

en 2D, Ω carré, maillage $(]ih,(i+1)h[\times]jh,(j+1)h[)_{i,j=1,\ldots,n}$:
$(x_1,x_2) \mapsto \varphi_i^{(k)}(x_1)\varphi_j^{(l)}(x_2)$

très compliqué sur triangles...

Claude Louis Marie Henri Navier, né à Dijon le 10 février 1785 et mort à Paris le 21 août 1836

Forme faible du problème

$$\boxed{\begin{aligned} -\mu\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

$$
\begin{aligned}
-\mu\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\
\operatorname{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{trouver } (\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \\
\int_\Omega (\mu \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\operatorname{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega \\
b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}&
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} -\mu\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{trouver } (\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d,$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mu\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= 0 \text{ p.p. } \boldsymbol{x}\in\Omega \end{aligned}$$

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Propriétés importantes de b, liées à $d \leq 3$

$$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in H_0^1(\Omega)^d,$$

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| \leq \|\boldsymbol{u}\|_{L^4}\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1}\|\boldsymbol{w}\|_{L^4} \leq C_{\mathrm{sob}}^2\|\boldsymbol{u}\|_{H_0^1}\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1}\|\boldsymbol{w}\|_{H_0^1}$$

$$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{E}(\Omega) \Rightarrow b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \Rightarrow b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. *Alors il existe au moins une solution* $(\boldsymbol{u}, p)$ *au problème précédent telle que* $\boxed{\|\boldsymbol{u}\|_{H_0^1} \leq \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\mu}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$ *et* $\boxed{\|p\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)}$

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Alors il existe au moins une solution $(\boldsymbol{u}, p)$ au problème précédent telle que $\boxed{\|\boldsymbol{u}\|_{H_0^1} \leq \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\mu} \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$ *et* $\boxed{\|p\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)}$

Démonstration.

L'existence de $(\boldsymbol{u}, p)$ vérifiant ces propriétés est montrée (dans ce cours) par convergence du schéma numérique (pas d'unicité dans le cas général).

□

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{trouver } (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,\\ \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\\ \forall q \in Q_h, \int_\Omega q(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,&\\ B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}))& \end{aligned}}$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$, **satisfaisant la condition inf-sup** il existe $\beta_h > 0$ tel que

$$\boxed{\forall q \in Q_h, \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \setminus \{0\}} \int_\Omega q \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|\boldsymbol{q}\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1},}$$

$$\text{trouver } (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,$$

$$\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p_h(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\forall q \in Q_h, \int_\Omega q(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}))$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$, **satisfaisant la condition inf-sup** il existe $\beta_h > 0$ tel que

$$\forall q \in Q_h, \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \setminus \{0\}} \int_\Omega q \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|q\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1},$$

Le schéma revient à résoudre un système d'équations non linéaires ! ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_i$ et $q = q_i$ fonctions de base). outil important :

Théorème (Point fixe de Brouwer)

Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

$$\text{trouver } (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h,$$
$$\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p_h(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$
$$\forall q \in Q_h, \int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$
$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}))$$

avec $\boldsymbol{V}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$, **satisfaisant la condition inf-sup** il existe $\beta_h > 0$ tel que

$$\forall q \in Q_h, \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \setminus \{0\}} \int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|q\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1},$$

Le schéma revient à résoudre un système d'équations non linéaires ! ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_i$ et $q = q_i$ fonctions de base). outil important :

Théorème (Point fixe de Brouwer)

Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Problèmes étudiés dans ce cours :

1. existence (pas d'unicité en vue...) de la solution discrète
2. convergence de cette solution discrète (à une sous-suite près...)

comment la trouver en pratique (problème important et encore moins commode) non traité dans ce cours

Lemme

Il existe au moins une solution au schéma telle que $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} \leq \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\mu} \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$

et $\boxed{\|p_h\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2})}$

Lemme

Il existe au moins une solution au schéma telle que $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} \leq \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\mu}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$

et $\boxed{\|p_h\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2})}$

Démonstration.

On considère la fonction $F \ : \ \boldsymbol{V}_h \to \boldsymbol{V}_h, \ \boldsymbol{w}_h \mapsto \boldsymbol{u}_h$ solution de

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \ \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \\ \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_h)) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\widetilde{\boldsymbol{V}}_h = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \text{ tels que } \forall q \in Q_h, \ \int_\Omega q \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}.}$

Lemme

Il existe au moins une solution au schéma telle que $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} \leq \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\mu}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$

et $\boxed{\|p_h\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2})}$

Démonstration.

On considère la fonction $F \; : \; \boldsymbol{V}_h \to \boldsymbol{V}_h, \; \boldsymbol{w}_h \mapsto \boldsymbol{u}_h$ solution de

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{trouver } \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \; \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_h)) \quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{array}}$$

avec $\boxed{\widetilde{\boldsymbol{V}}_h = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h \text{ tels que } \forall q \in Q_h, \; \int_\Omega q \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}.}$

alors $\boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$ solution d'un problème linéaire avec matrice carrée (prendre $\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i$).

Si on fait $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_h$, on obtient $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H^1_0} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$ ce qui prouve l'inversibilité de la matrice, donc l'existence et l'unicité de la solution ($\boldsymbol{f} = 0$ implique $\boldsymbol{u}_h = 0$).

□

suite.

La fonction F est continue car les coefficients du système linéaire sont continus par rapport à $\boldsymbol{w}_h$.
le théorème du point fixe de Brouwer montre l'existence d'au moins un $\boldsymbol{u}_h$ tel que $F(\boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$ avec $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$.

suite.

La fonction F est continue car les coefficients du système linéaire sont continus par rapport à $\boldsymbol{w}_h$.
le théorème du point fixe de Brouwer montre l'existence d'au moins un $\boldsymbol{u}_h$ tel que $F(\boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$ avec $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$.
Existence de la pression : Rappel : par condition inf-sup, on a $\Pi_{|Q_h}(\mathrm{div}(\boldsymbol{V}_h)) = Q_h$ ($\Pi_{|Q_h}$ projection orthogonale pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$).
on pose $X_h(\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_h))$
Pour $q \in Q_h$, si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_h$ tel que $\Pi_{|Q_h}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}) = \Pi_{|Q_h}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}) = q$, alors $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$, ce qui implique $X_h(\boldsymbol{v}) = X_h(\boldsymbol{w})$. On définit ainsi $T_h \ : \ q \mapsto X_h(\boldsymbol{v})$ linéaire

suite.

La fonction F est continue car les coefficients du système linéaire sont continus par rapport à $\boldsymbol{w}_h$.
le théorème du point fixe de Brouwer montre l'existence d'au moins un $\boldsymbol{u}_h$ tel que $F(\boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{u}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$ avec $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$.
Existence de la pression : Rappel : par condition inf-sup, on a $\Pi_{|Q_h}(\mathrm{div}(\boldsymbol{V}_h)) = Q_h$ ($\Pi_{|Q_h}$ projection orthogonale pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$).
on pose $X_h(\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(b(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_h))$
Pour $q \in Q_h$, si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_h$ tel que $\Pi_{|Q_h}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) = \Pi_{|Q_h}(\mathrm{div}\boldsymbol{w}) = q$, alors $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h$, ce qui implique $X_h(\boldsymbol{v}) = X_h(\boldsymbol{w})$. On définit ainsi $T_h \; : \; q \mapsto X_h(\boldsymbol{v})$ linéaire
Par théorème de Riesz, il existe un et un seul $p_h \in Q_h$ tel que $T_h(q) = \displaystyle\int_\Omega p_h(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega p_h(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ et $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ solution du schéma.
En choisissant $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_h$ tel que $\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1} = 1$ et $\displaystyle\int_\Omega p_h(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h\|p_h\|_{L^2}$, on déduit

$$\boxed{\beta_h\|p_h\|_{L^2} \leq \|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} + \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + C_{sob}^2\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1}^2 \leq \beta_h C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)}$$

$\square$

Théorème

Soit une suite d'espaces $(\boldsymbol{V}_{h_n}, Q_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que les erreurs d'interpolations tendent vers 0 et* $\beta_{h_n} \geq \beta > 0$ *quand* $n \to \infty$ *. Soit* $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ *solution du schéma avec* $h = h_n$ *telle que* $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$ *et* $\boxed{\|p_h\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)}$

Alors, à une sous-suite près, $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$ *dans* H_0^1 *et* $p_h \to p$ *dans* L^2 *avec* $(\boldsymbol{u}, p)$ **une** *solution faible des équations de Navier-Stokes*

Théorème

Soit une suite d'espaces $(\boldsymbol{V}_{h_n}, Q_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que les erreurs d'interpolations tendent vers 0 et* $\beta_{h_n} \geq \beta > 0$ *quand* $n \to \infty$ *. Soit* $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ *solution du schéma avec* $h = h_n$ *telle que* $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$ *et* $\boxed{\|p_h\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)}$

Alors, à une sous-suite près, $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$ *dans* H_0^1 *et* $p_h \to p$ *dans* L^2 *avec* $(\boldsymbol{u}, p)$ **une** *solution faible des équations de Navier-Stokes*

Démonstration.

On applique le **théorème de Rellich** et un théorème de Banach. Il existe une sous-suite (notée de manière identique) et deux fonctions $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ telles que :

1. $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$ et $\nabla \boldsymbol{u}_h \to \nabla \boldsymbol{u}$ **faiblement** dans $L^2(\Omega)^d$,
2. $p_h \to p$ **faiblement** dans $L^2(\Omega)$.

Théorème

Soit une suite d'espaces $(\boldsymbol{V}_{h_n}, Q_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que les erreurs d'interpolations tendent vers 0 et* $\beta_{h_n} \geq \beta > 0$ *quand* $n \to \infty$. *Soit* $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ *solution du schéma avec* $h = h_n$ *telle que* $\boxed{\|\boldsymbol{u}_h\|_{H_0^1} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}}$ *et* $\boxed{\|p_h\|_{L^2} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2)}$

Alors, à une sous-suite près, $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$ *dans* H_0^1 *et* $p_h \to p$ *dans* L^2 *avec* $(\boldsymbol{u}, p)$ **une** *solution faible des équations de Navier-Stokes*

Démonstration.

On applique le **théorème de Rellich** et un théorème de Banach. Il existe une sous-suite (notée de manière identique) et deux fonctions $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ telles que :

1. $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$ et $\nabla \boldsymbol{u}_h \to \nabla \boldsymbol{u}$ **faiblement** dans $L^2(\Omega)^d$,
2. $p_h \to p$ **faiblement** dans $L^2(\Omega)$.

Soit $q \in L_0^2(\Omega)$ et soit q_{h_n} une interpolation de q dans Q_{h_n} qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers q. On a, par **convergence fort/faible**,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega q_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

donc $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$.

suite.

Soit $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)$ et soit $\boldsymbol{v}_{h_n} \in \boldsymbol{V}_{h_n}$ une interpolation de $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{V}_{h_n}$ qui converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers $\boldsymbol{v}$.
On a, par **convergence fort/faible**,
$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ et
$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega p_{h_n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$,
par convergence forte dans L^4 de $\boldsymbol{u}_{h_n}$, faible dans L^2 de $\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}$, et forte dans L^2 de $\nabla \boldsymbol{v}_{h_n}$, $\lim_{n\to\infty} b(\boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{v}_{h_n}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et $\lim_{n\to\infty} b(\boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{v}_{h_n}, \boldsymbol{u}_{h_n}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.
Enfin $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

suite.

Soit $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)$ et soit $\boldsymbol{v}_{h_n} \in \boldsymbol{V}_{h_n}$ une interpolation de $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{V}_{h_n}$ qui converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers $\boldsymbol{v}$.

On a, par **convergence fort/faible**,

$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ et

$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega p_{h_n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

par convergence forte dans L^4 de $\boldsymbol{u}_{h_n}$, faible dans L^2 de $\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}$, et forte dans L^2 de $\nabla \boldsymbol{v}_{h_n}$, $\lim_{n\to\infty} b(\boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{v}_{h_n}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et $\lim_{n\to\infty} b(\boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{v}_{h_n}, \boldsymbol{u}_{h_n}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.

Enfin $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

comme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}(\Omega)$, $\frac{1}{2}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

donc $(\boldsymbol{u}, p)$ solution faible !

$\square$

suite.

on passe à la limite dans
$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
le second membre converge vers $\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

donc convergence forte de $\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}$ vers $\nabla \boldsymbol{u}$ dans L^2car

$$\lim_{n\to\infty} \int (\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x}) - \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) : (\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x}) - \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

□

suite.

$\square$

Soit $\widetilde{p}_{h_n}$ une interpolation de p dans Q_h qui converge fort dans L^2 vers p.
En choisissant $\boldsymbol{v}_{h_n} \in \boldsymbol{V}_{h_n}$ tel que $\|\boldsymbol{v}_{h_n}\|_{H_0^1} = 1$ et

$\int_\Omega (p_{h_n}(\boldsymbol{x}) - \widetilde{p}_{h_n}(\boldsymbol{x}))\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \beta_h \|p_{h_n} - \widetilde{p}_{h_n}\|_{L^2}$, on déduit

$$\boxed{\begin{aligned} S_n = &\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x}) - \widetilde{p}_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u}_{h_n}, \boldsymbol{v}_{h_n}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}_{h_n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\geq \beta \|p_{h_n} - \widetilde{p}_{h_n}\|_{L^2} \end{aligned}}$$

Par théorème de Rellich, à une sous-suite près, $\boldsymbol{v}_{h_n}$ converge fort dans L^2 vers $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)^d$ et $\nabla \boldsymbol{v}_{h_n}$ converge faiblement dans L^2 vers $\nabla \boldsymbol{v}$.
Grâce à la convergence forte de $\nabla \boldsymbol{u}_{h_n}$, on passe à la limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|p_{h_n} - \widetilde{p}_{h_n}\|_{L^2} = 0.$$

bonne poursuite de vos études !