Sujet de TER

Pierre Guillon

2020

Suiveurs, prédécesseurs dans un sous-décalage

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet (fini). L'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{ (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} | \forall i \in \mathbb{Z}, x_i \in \mathcal{A}\}$ des suites de lettres (ou mots biinfinis) peut être muni de la topologie produit de la topologie discrète, et de l'action de $\mathbb{Z}$ par décalage : $\sigma(x)_j = x_{j+1}$ pour $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et $j \in \mathbb{Z}$. On s'intéresse aux *sous-décalages*, qui sont les fermés invariants par décalage. De façon équivalente, Σ est un sous-décalage ss'il est l'ensemble des mots biinfinis dont tous les motifs finis sont dans un certain langage $L \subset \mathcal{A}^*$ (ensemble de mots finis) *biextensible* ($u \in L \implies \exists a, b \in \mathcal{A}, aub \in L$) et stable par facteur ($uvw \in L \implies v \in L$).

Ces ensembles sont donc un pont entre systèmes dynamiques et théorie des langages ou combinatoire des mots. On peut les étudier via des quantités qui rendent compte de la diversité des mots biinfinis qu'il contient : le plus classique est l'*entropie*, qui correspond à la croissance exponentielle du nombre de mots finis (de chaque longueur) qui y apparaissent.

On peut également définir l'ensemble des *suiveurs* d'un mot u par $\mathcal{F}_L(u) = \{v \in \mathcal{A}^* | uv \in L\}$. Si le nombre $s_l = \left|\left\{ \mathcal{F}_L(u) \middle| u \in \mathcal{A}^l \right\}\right|$ de suiveurs distincts de mots de longueur l est borné, alors Σ est *sofique*, c'est à dire que L est un langage *rationnel* (reconnaissable par un automate fini). [FOP15] étudie d'autres cas où cette suite est petite, et conjecture qu'elle ne peut pas être en-dessous de l (sans être bornée). Dans l'extrême inverse, [FP17] étudie la croissance exponentielle de cette suite, et la compare alors à l'entropie.

Dans ce TER, l'étudiant essaiera de comprendre les différents résultats de ces deux articles, l'idée d'un *saut* dans la première, et ce qui fait différer de l'entropie dans la seconde. Suivant l'envie, on pourra ensuite s'engouffrer dans ce saut pour essayer de bien cerner la conjecture, ou bien comprendre la généralisation aux sous-décalages bidimensionnels.

Profil : L'étudiant devra être intéressé par la théorie des langages, notamment dans ses aspects combinatoires.

Lieu : Saint Charles ou Luminy.

References

[FOP15] Thomas French, Nic Ormes, and Ronnie Pavlov. Subshifts with slowly growing numbers of follower sets. In Joseph Auslander, Aimee Johnson, and Cesar Silva, editors, *Contemporary Mathematics*, volume 678, pages 175–186. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, September 2015. 00000.

[FP17] Thomas French and Ronnie Pavlov. Follower, Predecessor, and Extender Entropies. *arXiv:1711.07515 [math]*, November 2017. 00000 arXiv: 1711.07515.