

# Master Classe Marseillaise

Rapport  
*à l'usage du magistère*

Elio JOSEPH

Contact :  
josephelio@gmail.com

## Première partie

# Daniel Matignon – Introduction à la géométrie des surfaces

Ref :

W. Massey, A basic course in algebraic topology

A.atcher, Algebraic Topology

M. A. Armstrong, Basic Topology

## 1 Surfaces

### 1.1 Variétés

Dans toute la suite, on se fixe  $n \in \mathbb{N}$ , on notera  $M$  ou  $M^n$  une variété de dimension  $n$ .

**Définition 1** On appelle *variété*, un espace topologique vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i)  $M$  est séparé ;
- (ii)  $M$  est à base dénombrable ;
- (iii)  $\forall x \in M$ ,  $x$  a un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n), x_n > 0\}$ .

$x \in M$ ,  $x$  admettant un voisinage homéomorphe  $\mathbb{R}_+^n \iff x \in \partial M$  : le *bord* de  $M$ .  
On définit aussi *l'intérieur* de  $M$  comme  $\text{int}M := M \setminus \partial M$ .

$M$  est dite *fermée* si  $M$  est compacte et  $\partial M = \emptyset$ .

Problème : classifier les surfaces. Pour cela, il faut trouver des invariants (algébriques ou numériques).

### 1.2 Orientation

**Exemple 2** La bande de Möbius n'est pas orientable,  $B \simeq \mathbb{S}^1 \times^{\vee} [0,1]$ .

Une surface n'est pas orientable si elle contient une bande de Möbius.  $F$  non orientable si  $F \supset \gamma$  une courbe fermée simple telle que  $N(\gamma)$  est une bande de Möbius.  $F$  surface orientable si, et seulement si, pour toute courbe fermée simple  $\gamma$ ,  $N(\gamma) \simeq \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ .

**Exemple 3** Bouteille de Klein :  $\mathbb{K}B^2$  : deux Möbius collés bord à bord.

Outils : homotopie, groupe fondamental, homologie.

## 2 Homotopie

### 2.1 Introduction

$X$  espace topologique,  $\gamma$  chemin ou lacet ( $\gamma: [0,1] \xrightarrow{C^0} X$ ,  $\gamma(0)$  est appelé la *source* et  $\gamma(1)$  est appelé le *but*;  $\gamma$  est un lacet si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ).

*Aboutement* des chemins :  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ , on note cela  $\gamma := \gamma_1 \cdot \gamma_2$ . Plus formellement :

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Soient  $f, g: X \xrightarrow{C^0} Y$ . On déforme  $f$  sur  $g$  de manière continue.  $f$  est *homotope* à  $g$  s'il existe  $F: X \times [0,1] \xrightarrow{C^0} Y$  telle que  $F(x,0) = f(x)$  et  $F(x,1) = g(x)$ . On note  $F_t$  pour tout  $t \in [0,1]$ ,  $F_t(x) := F(x,t)$ ,  $F_t: X \xrightarrow{C^0} Y$ .

**Remarque 4**  $\gamma: t \mapsto F_t(x)$  est un chemin.

On dit que  $F$  est une *homotopie* de  $f$  sur  $g$ .

Si  $A \subset X$ , et pour tout  $a \in A$ , pour tout  $t \in I$ ,  $F_t(a) = F(a,t) = f(a) = g(a)$ , on dit que  $F$  est une *homotopie relative* à  $A$ .

**Proposition 5** La relation d'homotopie (relative ou non) est une relation d'équivalence (notée  $\overset{H}{\sim}$  ou  $\overset{H/A}{\sim}$ ).

**Proposition 6** Soient  $f_1, f_2: X \xrightarrow{\vec{}} Y$ ,  $g_1, g_2: Y \xrightarrow{\vec{}} Z$ .

Si  $f_1 \overset{H}{\sim} f_2$  et  $g_1 \overset{H}{\sim} g_2$ , alors  $g_1 \circ f_1 \overset{H}{\sim} g_2 \circ f_2$ .

De même avec l'homotopie relative.

### 2.2 Homotopie des espaces topologiques

On dit que  $X \overset{H}{\sim} Y$  ( $X$  et  $Y$  sont *homotopes*) s'il existe  $f: X \xrightarrow{C^0} Y$  et s'il existe  $g: Y \xrightarrow{C^0} X$  tels que  $g \circ f \overset{H}{\sim} \text{id}_X$  et  $f \circ g \overset{H}{\sim} \text{id}_Y$ .

Si  $X$  est homotope à un point, on dit que  $X$  est contractile.

Réduction et déformation par rétraction.

$r: X \xrightarrow{C^0} Y$  est une *rétraction* de  $X$  sur  $Y$  si  $Y \subset X$  et pour tout  $y \in Y$ ,  $r(y) = y$ .

$F: X \times [0,1] \rightarrow X$  une homotopie relative à  $Y$ .

*Rétraction par déformation* si  $F(x,0) = x$  et  $F(x,1) \in Y$  pour tout  $x \in X$ , et si de plus  $F(y,t) = y$  pour tout  $y \in Y$  et pour tout  $t \in [0,1]$ .

On la note

$$\begin{aligned} \sigma: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto r(x) = F(x,1) \end{aligned}$$

rétraction de  $X$  sur  $Y$ ,  $r(y) = F(y,1) = y$  pour tout  $y \in Y$ .

**Proposition 7** S'il existe une rétraction par déformation de  $X$  sur  $Y$ , alors  $X \stackrel{H}{\sim} Y$ .

*Preuve.*

$i: Y \rightarrow X$  l'inclusion,  $r: X \rightarrow Y$  une rétraction. On a  $i \circ r(x) = r(x) = F(x,1)$  et  $r \circ i(y) = r(y) = \text{id}_Y(y)$  pour tout  $y \in Y$ .  $F(x,1) \stackrel{F}{\sim} F(x,0) = \text{id}_X$ , donc  $i \circ r \stackrel{H}{\sim} \text{id}_X$  et  $r \circ i \stackrel{H}{\sim} \text{id}_Y$ .  $\square$

## 3 Groupe fondamental

### 3.1 Homotopie des lacets

$\alpha: I \xrightarrow{C^0} X$  lacet ( $\alpha(0) = \alpha(1)$ )

**Proposition 8**  $\stackrel{H/A}{\sim}$  est une relation d'équivalence.

On fixe  $x_0 = a$ ,  $\alpha(0) = \alpha(1) = a$ ,  $A = \{a\}$ .

(On dit que  $a$  est un point base)

**Proposition 9** Si  $\alpha \stackrel{a}{\sim} \beta$  et  $\alpha' \stackrel{b}{\sim} \beta'$ , alors  $\alpha \cdot \alpha' \stackrel{a}{\sim} \beta \cdot \beta'$  (où le point signifie l'aboutement).

*Preuve.*

Cas particulier de ce qui a déjà été fait.

### 3.2 Groupe fondamental

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \{ \text{ensemble des classes d'équivalence } \stackrel{a}{\sim} \} \\ &= \{ [\alpha], \alpha: I \xrightarrow{C^0} X, \alpha(0) = \alpha(1) = a \} \end{aligned}$$

avec

$$[\alpha] = \{ \beta: I \xrightarrow{C^0} X, \beta(0) = \beta(1) = a, \alpha \stackrel{H}{\sim} \beta \}.$$

La proposition 9 implique que  $[\alpha] \cdot [\alpha'] = [\alpha \cdot \alpha']$  (loi de groupe bien définie sur  $\Gamma(a)$ ).

On note  $\pi_1(X, a)$  ce groupe appelé *groupe fondamental* de  $X$  (ou *de Poincaré*).

(On suppose  $X$  cpa connexe)

### 3.3 Propriétés

C'est associatif :  $[\alpha] \cdot [\beta \cdot \gamma] = [\alpha \cdot \beta] \cdot [\gamma]$ .

Element neutre : lacet constant  $[\gamma_a]$ , on a

$$[\gamma \cdot \gamma_a] = [\gamma_a \cdot \gamma] = [\gamma].$$

Inverse : sens inverse,  $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$  (chemin parcouru en sens inverse). On a

$$[\gamma \cdot \bar{\gamma}] = [\gamma_a] = [\bar{\gamma} \cdot \gamma],$$

$$[\bar{\gamma}] = [\gamma]^{-1}.$$

**Proposition 10**  $X$  cpa, pour tous  $a, b \in X$ ,

$$\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(X, b).$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} \phi_\gamma: \pi_1(X, b) &\longrightarrow \pi_1(X, a) \\ [\beta] &\longmapsto [\gamma \cdot \beta \cdot \bar{\gamma}] \end{aligned}$$

$$(\phi_j)^{-1} = \phi_{\bar{j}} \quad \square$$

Le groupe fondamental est un invariant homotopique.

**Proposition 11** Si  $X, Y$  sont homotopes, alors

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, y_0).$$

Homomorphisme de groupe induit :

Soit  $f: X \xrightarrow{C^0} Y$ ,  $f(x_0) = y_0$ . Alors on a

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

appelé *homomorphisme de groupe induit*, tel que  $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ .

Si  $\alpha$  continu,  $\alpha(0) = \alpha(1)$ , alors  $f \circ \alpha$  continu et  $f \circ \alpha(0) = f \circ \alpha(1)$ .

$$f \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow Y.$$

**Proposition 12** si  $f, g: X \xrightarrow{C^0} Y$  sont homotopes, alors  $f_* = g_*$ .

*Preuve.*

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_*([\alpha]) \text{ car } f \text{ est homotope à } g. \quad \square$$

**Corollaire 13** Si  $X \stackrel{H}{\sim} Y$ , alors il existe  $f, g$  continues telles que  $f \circ g \stackrel{H}{\sim} \text{id}_X$  et  $g \circ f \stackrel{H}{\sim} \text{id}_Y$ .

*Preuve.*

$$\begin{aligned} (f \circ g)_*([\alpha]) &= [(f \circ g) \circ \alpha] \\ &= [f \circ (g \circ \alpha)] \\ &= f_*([g \circ \alpha]) \\ &= f_* \circ g_*([\alpha]). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 14**

$$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

### 3.4 Exemples

Si  $X$  est convexe,  $X$  se rétracte par déformation sur un point, donc  $\pi_1(X, a) = \{\gamma_a\}$ , où  $\gamma_a$  est le lacet constant en  $a$ .

Si  $X = \mathbb{S}^1$ ,  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ .

$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1([0, 1]) \simeq \mathbb{Z}$ .

Si  $X$  est contractile,  $\pi_1(X)$  est trivial.

Si  $X = \mathbb{T}^2$  (le 2-tore),  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , alors  $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ .

Vocabulaire :  $X$  simplement connexe si  $X$  est connexe par arcs et  $\pi_1(X)$  est trivial.

## 4 Théorème de Van Kampen

Idée : découpage de  $X$  pour calculer le  $\pi_1$ .

$X = X_1 \cup X_2$ , avec  $X_1, X_2$  ouverts,  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  et connexe par arcs.

On a quatre inclusions :  $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow j_1$  et  $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X$ , qu'on note respectivement  $i_1, j_1, i_2, j_2$ .

Soit  $a \in X_1 \cap X_2$ .

Alors

$$\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(X, a) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2, a)} \pi_1(X_2, a).$$

→ produit libre de  $\pi_1(X, a)$  et  $\pi_2(X, a)$  sur  $\pi_1(X_1 \cap X_2, a)$ .

On exprime avec les générateurs et les relations :

$$\pi_1(X, a) = \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_u \rangle$$

et

$$\pi_1(X, a) = \langle h_1, \dots, h_n \mid s_1, \dots, s_v \rangle$$

alors

$$\pi_1(X_1, a) * \pi_1(X_2, a) = \langle g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \mid r_1, \dots, r_u, s_1, \dots, s_v, (i_1)_*(x) = (i_2)_*(x) \rangle$$

pour tout  $x$  générateur de  $\pi_1(X_1 \cap X_2, a)$ .

**Exemple 15** Grâce au théorème de Van Kampen, on peut calculer que le  $\pi_1$  d'un panier est  $\mathbb{Z}$  (on peut aller plus vite avec des rétractions).

## 5 Surfaces

### 5.1 Sphères et tores

On peut utiliser Van Kampen pour montrer que le  $\pi_1$  de la 2-sphère est trivial. De même pour  $\mathbb{S}^n$  avec  $n \geq 2$ .

On note  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  le 2-tore. On considère aussi le tore trouvé (on peut représenter tout cela avec des carrés (troués ou non), où on identifie les bords).

Le tore trouvé se rétracte sur un bouquet de deux cercles, et donc le  $\pi_1$  du tore trouvé est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$  (on utilise Van Kampen).

## 5.2 Möbius et plan projectif

Le  $\pi_1$  du Möbius est le groupe libre à un élément.

Plan projectif réel :  $\mathbb{R}P^2$ , qui s'identifie avec un Möbius auquel on aurait collé un disque sur le bord.

Plus généralement,  $\mathbb{R}P^n \simeq \mathbb{S}^n$ /application antipodale.

Encore avec le théorème de Van Kampen, on montre que  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, a) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

## 5.3 Bouteille de Klein, $KB^2$

$X = KB^2$  : on recolle deux Möbius collés bord-à-bord. On trouve  $\pi_1(KB^2) = \mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$ .

En recollant ainsi des pièces de plus en plus grosses, on peut s'occuper de plein de choses.

## 5.4 Découpages

Pour s'occuper d'un tore à  $n$  trous, Van Kampen est un fort bel outil.

# 6 Homologie

## 6.1 Définition abstraite

$X$  un espace topologique connexe par arcs,  $C_i(X) : \mathbb{Z}$ -module  $\rightarrow C_i, i \in \mathbb{Z}$ , complexe de chaînes.

Suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{u_{i+1}} C_i \xrightarrow{u_i} C_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} \cdots$$

telle que  $\text{Im}(u_{i+1}) < \ker(u_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

$H_i = H_i(X) := \ker(u_i) / \text{Im}(u_{i+1})$  : *premier groupe d'homologie* de  $X$ .

**Proposition 16**  $H_i(X)$  ne dépend que du type d'homotopie de  $X$  (pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ).

Cas particulier :  $i = 1$ ,

$$C_2 \xrightarrow{u_2} C_1 \xrightarrow{u_1} C_0,$$

$H_1 = \ker(u_1) / \text{Im}(u_2)$ .

$u_i = \partial_i$  application bord, on la note  $\partial$

$H_1 = \ker \partial / \text{Im} \partial$ .

**Proposition 17**  $\partial^2 = 0$ .

Cas particulier :  $H_1 = \pi_1$  abélianisé.

## 6.2 Cas des surfaces

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2 \simeq H_1(\mathbb{T}^2).$$

$$H_1(\mathbb{T}^2 \text{ troué}) \simeq \mathbb{Z}^2 \simeq \langle x, y, xy = yx \rangle.$$

$$H_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$H_1(KB^2) \simeq \langle x, y, x^2 = y^2; xy = yx \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$H_1(T_g) \simeq \mathbb{Z}^{2g}, \text{ où } T_g \text{ est le tore de genre } g.$$

$$H_1(X \times Y) \simeq H_1(X) \times H_1(Y).$$

## 7 Caractéristique d'Euler-Poincaré

### 7.1 Définition abstraite

$X$  espace topologique connexe par arcs, on note  $\chi(X)$  sa *caractéristique d'Euler* :

$$\chi(X) := \sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i$$

où  $\partial_i := \dim(H_i(X))$ .

Triangulation : décomposition de  $X$  en cellules, chaque cellule est isomorphe à  $B^i$  (boule de dimension  $i$ ).

dim 0 : point  $\rightarrow$  générateurs de  $C_0(X)$

dim 1 : arête  $\rightarrow$  générateurs de  $C_1(X)$

dim 2 : face  $\rightarrow$  générateurs de  $C_2(X)$

$\vdots$

### 7.2 Surfaces

Triangulation. Aucune arête ne se coupe dans l'intérieur, *i.e.*  $e_1, e_2$  deux arêtes telles que  $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ , alors  $e_1 \cap e_2 = \partial e_1 \cap \partial e_2$ . Tout sommet est incident à au moins deux arêtes. Toute face est homéomorphe à  $\mathbb{D}^2$ .

**Proposition 18** Toute surface (toute variété compacte) est triangulable (admet une triangulation).

On a

$$\chi(\text{surface}) = \#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces}.$$

**Proposition 19** (i)  $\chi(X)$  ne dépend pas de la triangulation.

(ii)  $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$ .

(iii)  $\chi$  est un invariant homotopique.

**Exemple 20** (i)  $\chi(\mathbb{D}^2) = 3 - 3 + 1 = 1$

(ii)  $\chi(\mathbb{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$

(iii)  $\chi(\text{anneau}) = 0$



- (iv)  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$
- (v)  $\chi(\mathbb{R}P^2) = 0 + 1 - 0 = 1$
- (vi)  $\chi(\text{Möbius}) = 0$  (car le Möbius est homotope au cercle)
- (vii)  $\chi(KB^2) = 0 + 0 - 0 = 0$
- (viii)  $\chi(T_g) = 2 - 2g$

## Deuxième partie

# Frédéric Palési – Géométrie hyperbolique, surfaces hyperboliques

Ref :

Anderson : Hyperbolic Geometry

Stillwill : Geometry of Surfaces

Bonabon : Low-dimensional Geometry

## 8 Introduction

$X = [0,1]/\sim$  où  $(0,y) \sim (1,y)$  et  $(x,0) \sim (x,1)$  ( $X$  est un tore)

On considère  $\mathbb{R}^2$ , on fait agir  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  par translation.

$X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , la géométrie de  $\mathbb{R}^2$  passe au quotient

Si  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , le tore obtenu en identifiant les côtés opposés du parallélogramme formé par  $u$  et  $v$  n'est pas le même que celui formé avec le carré.

Au début du 19<sup>ème</sup> siècle, on voulait calculer des intégrales elliptiques :

$$\int \ell(x) dx.$$

Ces intégrales n'ont pas de forme fermée. Jacobi introduisit la fonction  $\ell^{-1}$  (prolongée analytiquement à  $\mathbb{C}$ ).

Celle-ci est doublement périodique :

$$\exists \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \ell^{-1}(z + \tau_1) = \ell^{-1}(z + \tau_2) = \ell^{-1}(z).$$

$\ell^{-1}$  est donc invariant par un groupe de translations isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

$\ell^{-1}$  est définie sur un tore (avec une géométrie).

Fin 19<sup>ème</sup> : équations Fuchsines (équations différentielles). Comme les intégrales elliptiques, on n'a pas de forme fermée, comme précédemment, on considère sa réciproque. Les réciproques des solutions sont invariantes par une famille d'homographies :

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Poincaré comprend alors que la géométrie hyperbolique est préservée par les homographies. Il peut donc appliquer des méthodes géométriques aux équations Fuchsienues.

But :

- Comprendre cette géométrie.
- Construire des surfaces hyperboliques.

## 9 Demi-plan de Poincaré

**Définition 21** On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

On pose  $\partial\mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Soit  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{H}$  (lisse par morceaux).

On définit la longueur

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) := \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt.$$

**Exemple 22** On appelle  $\gamma_1$  le chemin direct entre  $-2 + i$  et  $2 + i$  et  $\gamma_2$  le chemin direct entre les mêmes points, mais faisant un détour par  $3i$ .

On a  $\gamma_1(t) = (-2 + i)(1 - t) + (2 + i)t = (-2 + i) + 4t$ . Alors

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma_1) = \int_0^1 \frac{4}{1} dt = 4.$$

On note  $\gamma_{2,0}$  et  $\gamma_{2,1}$  les deux parties de  $\gamma_2$ . On a  $\gamma_{2,0}(t) = (-2 + i) + (2 + 2i)t$  et  $\gamma_{2,2}(t) = 3i + (2 - 2i)t$ . Donc

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}}(\gamma_2) &= \ell_{\mathbb{H}}(\gamma_{2,0}) + \ell_{\mathbb{H}}(\gamma_{2,1}) \\ &= \int_0^1 \frac{|2 + 2i|}{1 + 2t} dt + \int_0^1 \frac{|2 - 2i|}{3 - 2t} dt \\ &= 2\sqrt{2} \frac{1}{2} \ln(3) + 2\sqrt{2} \frac{1}{2} \ln(3) \\ &= 2\sqrt{2} \ln(3) \\ &< 4, \end{aligned}$$

la ligne droite n'est donc pas le chemin le plus rapide!

On définit une distance :

$$d_{\mathbb{H}}(z, z') := \inf\{\ell_{\mathbb{H}}(\gamma), \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{H}, \gamma(0) = z, \gamma(1) = z'\}.$$

**Définition 23** Une *géodésique* est une courbe qui réalise (localement) cet infimum.

A quoi ressemblent les géodésiques ?

**Définition 24** On pose

$$\mathcal{M} := \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}$$

l'ensemble des *transformations de Möbius* ou *homographies*.

**Proposition 25** Une homographie est une isométrie de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ .

*Preuve.*

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{H}, \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \gamma' := \varphi \circ \gamma.$$

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}}(\gamma') &= \int_0^1 \frac{|(\varphi \circ \gamma)'(t)|}{\operatorname{Im}(\varphi(\gamma(t)))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\varphi'(\gamma(t))|}{\operatorname{Im}(\varphi(\gamma(t)))} |\gamma'(t)| dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varphi'(z)| &= \left| \frac{a(cd + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} \right| \\ &= \left| \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \right| \\ &= \frac{ad - bc}{|(cz + d)^2|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varphi(\gamma(t))) &= \operatorname{Im} \left( \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{(a\gamma(t) + b)(\overline{c\gamma(t) + d})}{|c\gamma(t) + d|^2} \right) \\ &= \frac{ad \operatorname{Im}(\gamma) - bc \operatorname{Im}(\gamma)}{|c\gamma(t) + d|^2} \\ &= |\varphi'(\gamma(t))| \times \operatorname{Im}(\gamma(t)), \end{aligned}$$

donc  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma') = \ell_{\mathbb{H}}(\gamma)$ . □

Donc les homographies envoient une géodésique sur une géodésique.

**Exemple 26** Géodésique entre  $i$  et  $\lambda i$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}}(\gamma_0) &= \int_0^1 \frac{|\lambda - 1|}{1 + (\lambda - 1)t} dt \\ &= \ln(\lambda). \end{aligned}$$

Si maintenant  $\gamma(t) := x(t) + iy(t)$ ,

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\sqrt{(y'(t))^2}}{y(t)} dt \\ &= \ln(y(1)) - \ln(y(0)) \\ &= \ln(\lambda). \end{aligned}$$

**Lemme 27** La demi-droite verticale est une géodésique.

Quelle est l'image par  $\mathcal{M}$  de  $i\mathbb{R}_+^*$ .

**Proposition 28** Cette image est l'ensemble

$$\mathcal{H} := \{\text{demi-droites verticales}\} \cup \{\text{demi-cercles centrés sur } \mathbb{R}\}.$$

Demi-droites :  $\{z, \operatorname{Re}(z) = x_0\}$ .

Cercles :  $|z - z_0| = R \iff (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \iff z\bar{z} \operatorname{Re}(z) + (z_0^2 - R^2) = 0$ .

Un élément de  $\mathcal{H}$  a pour équation

$$\alpha z\bar{z} + \beta \operatorname{Re}(z) + \gamma = 0$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ( $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ).

On peut montrer que  $\mathcal{H}$  est stable par  $\mathcal{M}$  et que l'action est transitive, *i.e.*

$$\forall \Delta \subset \mathcal{H}, \exists \varphi \in \mathcal{M}, \varphi(i\mathbb{R}_+^*) = \Delta.$$

On peut voir qu'entre deux points donnés, il existe une unique géodésique (qui est élément de  $\mathcal{H}$ ).

Cette géométrie satisfait tous les axiomes de la géométrie euclidienne classique, sauf l'axiome des parallèles : "pour toute droite  $D$ , pour tout point  $P \notin D$ , il existe une unique droite  $D' \ni P$  tel que  $D \cap D' = \emptyset$ ". En géométrie hyperbolique, il existe une infinité de telles droites.

Notion d'angle : angle hyperbolique = angle euclidien.

On remarque que les homographies sont holomorphes, donc conformes (elles préservent les angles).

En géométrie hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est toujours inférieure (ou égale) à  $\pi$ . Plus le triangle est grand, plus la somme des angles va être petite.

Notion d'aire : Si  $A \subset \mathbb{H}$  (mesurable), on a l'aire hyperbolique :

$$\operatorname{Aire}_{\mathbb{H}}(A) := \iint_A \frac{d^2z}{(\operatorname{Im}(z))^2}.$$

**Proposition 29** Si  $T$  triangle et ses angles sont  $\alpha, \beta, \gamma$ , alors

$$\operatorname{Aire}_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Ainsi, un triangle est entièrement déterminé par ses angles en géométrie hyperbolique, ce qui n'est bien entendu pas le cas en géométrie euclidienne classique.

**Définition 30** Un sommet d'un triangle est dit *idéal* s'il est dans  $\partial\mathbb{H}$ .

On considère  $T$  un triangle d'angles  $0, \alpha, \beta$ , de sommets  $A, B$  et  $C := \infty$ .  
On peut calculer l'aire de  $T$ .

$$\begin{aligned} \text{Aire}(T) &= \int_{-\cos(\alpha)}^{\cos(\beta)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx \\ &= \int_{-\cos(\alpha)}^{\cos(\beta)} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= [-\text{Arccos}(x)]_{-\cos(\alpha)}^{\cos(\beta)} \\ &= -\beta + \text{Arccos}(-\cos(\alpha)). \end{aligned}$$

On peut utiliser ce travail pour calculer l'aire d'un triangle quelconque d'angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , en ramenant le calcul d'aire à une différence de deux aires de triangles idéaux (déjà calculés).

Ainsi, si on note  $T$  notre triangle quelconque et  $T'$  le triangle idéal au-dessus, alors

$$\text{Aire}(T + T') = \pi - \alpha - (\beta + \beta')$$

et

$$\text{Aire}(T') = \pi - \beta' - (\pi - \alpha)$$

donc

$$\text{Aire}(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

**Remarque 31** Si  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , il existe un triangle hyperbolique ayant ces angles là, unique à homographie près (les longueurs sont déterminés par les angles).

Plus généralement, si  $P$  polygone à  $n$  côtés d'angles  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , alors

$$\text{Aire}(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

On veut ici faire des pavages du plan euclidien par des polygones réguliers.

En géométrie euclidienne, il n'existe que trois pavages réguliers du plan (se voit en écrivant les conditions pour avoir un pavage régulier).

En hyperbolique :  $p, q, r \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Pavage de  $\mathbb{H}$  avec un triangle  $\pi/p, \pi/q$  et  $\pi/r$ .

Petite curiosité : il existe un pentagone régulier à angles droits.

## 10 Classification des isométries de $\mathbb{H}$

### Théorème 32

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \mathcal{M} \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

avec

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \mapsto \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On a

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \text{GL}^+(2, \mathbb{R}) / \{\lambda I_2\} \simeq \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm I_2\}.$$

**Remarque 33**  $\mathcal{M}$  est un groupe pour la composition.

Points fixes ?

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $ad - bc = 1$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\varphi(z) = z \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

$$\Delta = (a - d)^2 + 4cb = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a + d)^2 - 4.$$

Il y a trois cas possibles :

- $(a + d)^2 > 4$ , deux points fixes dans  $\partial\mathbb{H}$  (*isométrie hyperbolique*);
- $(a + d)^2 = 4$ , un seul point fixe dans  $\partial\mathbb{H}$  (*isométrie parabolique*);
- $(a + d)^2 < 4$ , deux points fixes dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , un point fixe dans  $\mathbb{H}$  (*isométrie elliptique*).

**Exemple 34**  $\varphi_1(z) = kz = \frac{kz+0}{0z+1}$ ,  $k > 0$ .

$$\varphi_1 \sim \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{k} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2,$$

donc on est dans le cas d'une isométrie hyperbolique.

Sur la droite  $(0, \infty)$ ,  $\varphi_1$  agit comme une translation. La droite  $(0, \infty)$  est appelée l'*axe* de  $\varphi_1$ .

**Exemple 35**  $\varphi_2(z) = z + 1$

$$\varphi_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1 + 1)^2 = 4,$$

donc on est dans le cas d'une isométrie parabolique.

**Exemple 36**  $\varphi_3(z) = \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta}$ .

$$\varphi_3 \sim \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$2 \cos \theta < 2,$$

donc on est dans le cas d'une isométrie elliptique.

## 11 Groupes Fuchsien

**Définition 37** Un *groupe Fuchsien* est un sous-groupe discret (tous les points sont isolés) de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**Remarque 38** Il suffit de vérifier que l'identité est isolée.

**Exemple 39** • Sous-groupe fini.

- Si  $\varphi \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\Gamma = \langle \varphi \rangle$ . Alors  $\Gamma$  est discret si  $\varphi$  est elliptique et  $\theta \notin \mathbb{Q}\pi$ .
- $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est Fuchsien
- $\langle A, B \rangle$  est Fuchsien et libre de rang 2 avec

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

## 12 Surfaces hyperboliques

**Définition 40** Soit  $\Sigma$  une variété de dimension 2 (sans bord). Une structure hyperbolique est la donnée d'un atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tel que

- (i)  $\{U_i\}$  recouvrement ouvert de  $\Sigma$ ;
- (ii)  $\varphi: U_i \rightarrow \mathbb{H}$  homéomorphisme sur son image;
- (iii) Si (pour chaque composante connexe)  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ .

Métrie sur  $\Sigma$  :  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \Sigma$ , on subdivise  $[0, 1]$  en  $\{[t_i, t_{i+1}]\}$  de sorte que  $\sigma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_j$  pour un certain  $j$ ,

$$\ell(\sigma) = \sum_{k=1} \ell_{\mathbb{H}}(\varphi_k \circ \sigma|_{[t_k, t_{k+1}]})$$

**Exemple 41** 1. Quadrilatère hyperbolique. On identifie les côtés opposés. A cause de la somme des angles qui est plus petite que  $2\pi$ , on peut voir qu'il n'y a pas de structure hyperbolique.

2. Octogone régulier avec angles  $\pi/4$ . On identifie les côté opposés, autour du sommet on a bien  $2\pi$ . On obtient bien une structure hyperbolique.
3. Si  $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  Fuchsien, sans torsion, alors le quotient  $\mathbb{H}/\gamma$  est muni d'une structure hyperbolique naturelle.

**Théorème 42 (d'Uniformisation)** Si  $\Sigma$  est une surface munie structure hyperbolique complète. Alors il existe  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H})$  un groupe Fuchsien sans torsion tel que  $\Gamma$  soit isométrique à  $\mathbb{H}/\Gamma$  et  $\Gamma \simeq \pi_1(\Sigma)$ .

Développante.

Soit  $x_0 \in \Sigma$ , soit  $\{\sigma: [0,1] \rightarrow \Sigma, \sigma(0) = x_0\} / \sim =: \tilde{\Sigma}$  où  $\sigma \sim \tau$  si  $\sigma(0) = \tau(0)$ ,  $\sigma(1) = \tau(1)$  et  $\sigma$  est homotope à  $\tau$ .  $\tilde{\Sigma}$  est le revêtement universel. On définit une application  $\text{Dev}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{H}$ , appelée la *développante*.

**Proposition 43** L'application  $\text{Dev}$  est une isométrie de  $\tilde{\Sigma}$  sur  $\mathbb{H}$ .

On définit

$$\text{hol}: \pi_1(\Sigma, x_0) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

**Proposition 44**  $\text{hol}$  est un morphisme injectif.

Tout ceci peut nous amener à une définition de l'espace de Teichmüller.

**Remarque 45** Tout ceci n'est qu'un cas particulier des  $(X, G)$ -structures.  $X$  est un espace modèle,  $G$  une transformation de  $X$ . Par exemple  $X := \mathbb{R}P^2$  et  $G := \text{PGL}(3, \mathbb{R})$ .

## Troisième partie

# Thierry Coulbois – Groupes libres

## 13 Mots, mots réduits

Soit  $\mathcal{A}$  un *alphabet*, par exemple  $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$ . Un *mot* est une suite finie de lettres, par exemple  $aab$ . On notera  $\varepsilon$  le mot vide.

On se donne une application

$$w: \{1, \dots, \ell\} \rightarrow \mathcal{A},$$

on définit la *longueur*  $\ell(w) = |w| = \ell$ .

On note  $\mathcal{A}^*$  l'ensemble des mots. On note  $u.v$  la concaténation de deux mots.

**Proposition 46**  $\mathcal{A}^*$  muni ddu produit de concaténation est un monoïde dont le mot vide est l'élément neutre.



*Preuve.*

La concaténation est associative. □

**Proposition 47**  $\mathcal{A}^*$  est régulier et sans torsion.

*Preuve.*

Régulier : pour tous  $u, v, w \in \mathcal{A}^*$ ,  $uv = uw$ , donc  $v = w$ , et  $vu = wu$  implique  $v = w$ .  
 Sans torsion :  $u \in \mathcal{A}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \neq \varepsilon$  implique  $u^n \neq \varepsilon$ . En effet,  $\ell(uv) = \ell(u) + \ell(v)$ , donc  $\ell(u^n) = n\ell(u) \neq 0$ . □

**Exemple 48**  $\mathcal{A} = \{1\}$ ,  $(\mathcal{A}^*, \cdot, \varepsilon) \simeq (\mathbb{N}, +, 0)$ .

**Théorème 49**  $\mathcal{A}$  alphabet, deux mots  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{A}^*$  commutent si, et seulement si, ils sont les puissances d'un même mot.

*Preuve.*

$u$  et  $v$  commutent :  $uv = vu$ . Quitte à échanger, on peut supposer  $|u| \leq |v|$ . Dans ce cas,  $u$  est un préfixe de  $v$ , c'est-à-dire qu'il existe  $v' \in \mathcal{A}^*$  tel que  $v = uv'$ .

Alors  $uv = uvv'$ ,  $vu = uv'u$ . Par régularité à gauche,  $uv' = v'u$ . Par récurrence sur  $|u| + |v|$ , il existe  $w \in \mathcal{A}^*$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  tels que  $u = w^\alpha$ ,  $v' = w^\beta$ , et donc  $v = uv' = w^\alpha w^\beta = w^{\alpha+\beta}$ . □

On appelle  $\mathcal{A}^{\pm 1}$  un alphabet avec des inverses :

$$\mathcal{A}^{\pm 1} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1} = \{a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$$

(ou bien : alphabet muni d'une involution  $^{-1}$  sans point fixe).

Un mot sur l'alphabet  $\mathcal{A}^{\pm 1}$  est *réduit* si pour  $1 \leq i \leq \ell(w) - 1$ ,  $w_i \neq w_{i+1}^{-1}$ ;  $w$  est *cycliquement réduit* si de plus  $w_1 \neq w_\ell^{-1}$ .

Soient  $u, v$  deux mots réduits sur  $\mathcal{A}^{\pm 1}$ , on peut considérer  $u \circ v$ , la *concaténation avec réduction*, qui fait ce que son nom indique.

Remarquons que  $u \circ v = u'.v'$  est un mot réduit.

On définit  $F_{\mathcal{A}}$  l'ensemble des mots réduits sur  $\mathcal{A}^{\pm 1}$ .  $F_{\mathcal{A}}$  muni du produit de concaténation-réduction est le *groupe libre sur l'alphabet  $\mathcal{A}$* .

Autre approche :  $w$  un mot sur  $\mathcal{A}^{\pm 1}$ , une *réduction* de  $w$ , pour  $i < |w|$  avec  $w_i = w_{i+1}^{-1}$ . On remplace  $w$  par  $w' = w_1 \cdots w_{i-1} w_{i+2} \cdots w_\ell$ .

On considère la relation d'équivalence  $\sim$  engendré par symétrie et transitivité par la réduction élémentaire. Chaque classe d'équivalence possède un unique représentant réduit. La relation  $\sim$  est compatible à la concaténation, et

$$F_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^{\pm 1})^* / \sim .$$

Par convention,  $\ell(w) = |w|$  est la longueur du représentant réduit.

**Remarque 50** Tout mot réduit  $w$  s'écrit de manière unique  $w = uvu^{-1}$ , avec  $v$  cycliquement réduit. Si  $w \neq \varepsilon$ , alors  $v \neq \varepsilon$ .

**Théorème 51**  $(F_{\mathcal{A}}, \circ, \varepsilon)$  est un groupe.

**Exemple 52** Pour  $\mathcal{A} = \{1\}$ ,  $F_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}$ .

- Proposition 53** (i) Les groupes libres sont sans torsion.  
 (ii) Deux éléments d'un groupe libre commutent si, et seulement si, ils sont les puissances d'un même mot.

*Preuve.*

- (i) Pour tout  $w \in F_{\mathcal{A}}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|w^n\|_{\mathcal{A}} = n \|w\|_{\mathcal{A}}$ .  
 (ii) Si le produit  $u \circ v = u.v$  est réduit, alors d'après les égalités sur les longueurs,  $|vu| = |u.v| = |u| + |v|$ ,  $v.u$  est réduit. Ainsi,  $u.v = v.u$  et est donc dans  $(\mathcal{A}^{\pm 1})^*$ . Il existe  $w \in (\mathcal{A}^{\pm 1})^*$  et  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{N}$  tels que  $u = w^\alpha$  et  $v = w^\beta$  dans  $(\mathcal{A}^{\pm 1})^*$ , et est donc dans  $F_{\mathcal{A}}$ .

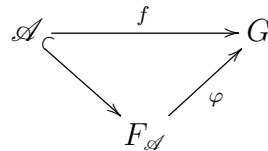
Cas général : écrivons  $v$  sous forme cycliquement réduite :  $v = v_1.v_0.v_1^{-1}$ . On calcule  $u_0 = v_1^{-1} \circ u.v_1$  et remarquons que  $u_0.v_0 = v_1^{-1}u.v_1.v_0 = v_1^{-1}uv.v_0 = v_1^{-1}v.u.v_1 = v_1^{-1}v.v_1.v_0 = v_0.u_0$ . Comme  $v_0$  est cycliquement réduit, l'un de  $u_0 \circ v_0$  ou  $u_0 \circ v_0^{-1}$  est réduit.

Si  $u_0 \circ v_0$  est réduit, alors il existe  $w$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  tels que  $u_0 = w_0^\alpha$  et  $v_0 = w_0^\beta$ , alors  $u = v_1.u_0.v_1^{-1} = (v_1.w.v_1^{-1})^\alpha$  et  $v = v_1.v_0.v_1^{-1} = (v_1.w.v_1^{-1})^\beta$ . Si  $u_0 \circ v_0^{-1}$  est réduit, à nouveau d'après la première partie il existe  $w$  et il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , tels que  $u_0 = w^\alpha$  et  $v_0^{-1} = w^\beta$ .

## 14 Propriété universelle

**Théorème 54**  $(F_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$  est l'objet universel de la catégorie des groupes.

Pour tout groupe  $G$  et toute application  $f: \mathcal{A} \rightarrow G$ , il existe un unique morphisme de groupes  $\varphi: F_{\mathcal{A}} \rightarrow G$  tel que pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $f(a) = \varphi(a)$ .



Définir  $\varphi : w = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_\ell^{\varepsilon_\ell}$ , avec  $a_1, \dots, a_\ell \in \mathcal{A}$ ,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{\pm 1\}$ ;  $\varphi(w) = f(a_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(a_\ell)^{\varepsilon_\ell}$ .

Deux groupes libres  $F_{\mathcal{A}}$  et  $F_{\mathcal{B}}$  sont isomorphes si, et seulement si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  ont le même cardinal.

**Corollaire 55** Tout groupe est quotient d'un groupe libre.

*Preuve.*

$G$  un groupe,  $\mathcal{A}$  une partie génératrice (par exemple  $\mathcal{A} = G$ ). □

## 15 Réduction de Nielsen

**Théorème 56 (de Nielsen-Schreier)** Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

$W$  une partie de  $F_{\mathcal{A}}$ .  $W$  est réduite au sens de Nielsen si

- (i)  $\forall w \in W, w \neq \varepsilon$  et  $w^{-1} \notin W$ ;
- (ii)  $\forall w_1, w_2 \in W^{\pm 1}, w_1 w_2 \neq \varepsilon \implies |w_1 w_2| \geq \max(|w_1|, |w_2|)$ ;
- (iii)  $\forall w_1, w_2, w_3 \in W^{\pm 1}, w_1 w_2 \neq \varepsilon$  et  $w_2 w_3 \neq \varepsilon \implies |w_1 w_2 w_3| > |w_1| - |w_2| + |w_3|$ .

**Théorème 57** Si  $W$  est une partie d'un groupe libre  $F_{\mathcal{A}}$  réduite au sens de Nielsen, alors le sous-groupe  $H := \langle W \rangle$  engendré par  $W$  est libre sur  $W$ .

*Preuve.*

La condition (ii) dit que l'effacement qui se produit dans  $w_1 w_2$  n'excède pas la moitié de  $w_1$  et la moitié de  $w_2$ .

$$w_1 = u_1.v, w_2 = v^{-1}.u_2, w_1 \circ w_2 = u_1.u_2.$$

$$|u_1| \geq 1/2 |w_1|^2 \text{ et } |u_2| \geq 1/2 |w_2|.$$

De plus, d'après (ii),  $w_1 \circ w_2 \circ w_3$  [...] □

Transformations de Nielsen :

On change un mot  $W$  en un mot  $W'$  : on remplace dans  $W$  un élément  $w_1$  par

( $T_0$ ) : enlever  $w_1$  si  $w_1 = \varepsilon$

( $T_1$ ) : remplacer  $w_1$  par  $w_1^{-1}$

( $T_2$ ) : remplacer  $w_1$  par  $w_1 w_2$  (où  $w_2 \in W, w_2 \neq w_1$ ).

**Lemme 58** Soit  $W \rightsquigarrow W'$  une transformation de Nielsen. Alors  $\langle W \rangle = \langle W' \rangle$ .

*Preuve.*

( $T_0$ ) et ( $T_1$ ) ok.

( $T_2$ ) :  $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2, w_2 \rangle$ . □

**Remarque 59** En combinant ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ), on peut aussi remplacer  $w_1$  par  $w_1 w_2^{-1}$  ou  $w_2 w_1$ .

**Théorème 60** Pour toute partie finie  $W$ , il existe une suite finie de transformations de Nielsen qui arrive à  $W'$  réduite au sens de Nielsen.

**Corollaire 61 (Nielsen)** Tout sous-groupe de type fini d'un groupe libre est libre.

*Preuve. (du théorème 60)*

S'il existe  $w_1, w_2 \in W^{\pm 1}$  tels que  $w_1 w_2 \neq \varepsilon$ , alors par des transformations de Nielsen, on remplace le plus grand des deux par  $w_1 w_2$  qui est de longueur strictement plus petite. Par récurrence, on obtient un système  $W'$  qui vérifie les conditions (i) et (ii) de Nielsen. Si la condition (ii) n'est pas vérifiée, il existe  $w_1, w_2, w_3 \in W^{\pm 1}$  tels que  $w_1 w_2 \neq \varepsilon$  et  $w_2 w_3 \neq \varepsilon$ , alors  $|w_1 w_2 w_3| = |w_1| - |w_2| + |w_3|$ . On a  $w_1 = u_1.v$ ,  $w_2 = v^{-1}.u_2.t$  et  $w_3 = t^{-1}.u_3$ . D'après (i),  $|v| \leq 1/2 |w_2|$ ,  $|t| \leq 1/2 |w_2|$ . Ici, on a obtenu  $u_2 = \varepsilon$ , donc  $|v| = 1/2 |w_2| = |t|$ , ainsi  $v \neq t$ . Quitte à tout retourner,  $v < t$  (on choisit l'ordre lexicographique). En utilisant ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ), nous remplaçons  $w_3$  par  $w_2 w_3 = v^{-1}.u_3$ . Nous obtenons  $W''$ . Définissons un ordre sur les parties  $W$  qui soit un bon ordre et tel que dans notre démonstration  $W' < W$  et  $W'' < W$  (bon ordre : ordre total où toute partie non vide possède un plus petit élément). C'est ce qui permet de faire une récurrence en considérant la partie où les propriétés ne sont pas vérifiées. □

## 16 Variations

### 16.1 Présentation d'un groupe

$X$  alphabet,  $R$  des éléments du groupe libre  $F_X$  appelés les *relations*,  $\langle\langle R \rangle\rangle$  le sous-groupe distingué de  $F_X$  engendré par  $R$ .

Le groupe  $G := F_X / \langle\langle R \rangle\rangle$  est le groupe de présentation  $\langle X | R \rangle$ .

**Exemple 62**  $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | [a, b] \rangle = \langle a, b | a^{-1}b^{-1}ab = 1 \rangle = \langle a, b | ab = ba \rangle$ .

**Exemple 63**  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \simeq \langle a, b | a^2, b^3 \rangle$

**Exemple 64**  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) = \langle a, b | a^2 = b^3, a^4 = b^6 = 1 \rangle$

**Exemple 65**  $\mathfrak{S}_3 = \langle a, b | a^2 = b^3, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$

**Définition 66** On dit que  $G$  est de *présentation finie* s'il existe  $X \subset G$  tel que  $R \subset F_X$ ,  $X$  et  $R$  finies telles que  $G = \langle X | R \rangle$ .

Problèmes de Dehn :

1. Etant donné une présentation finie  $G = \langle X | R \rangle$  et un mot  $w \in F_X$ , peut-on décider s'il  $w = 1_G$ .

Il existe un groupe de présentation finie où le problème du mot est indécidable.

2. Problème de nullité : étant donné une présentation finie  $G = \langle X | R \rangle$ , il faut décider si  $G \simeq 1$  ou non.

Ce problème est aussi indécidable.

### 16.2 Produit libre

**Définition 67** Soient  $A$  et  $B$  deux groupes. Le *produit libre*  $A * B$  est l'ensemble des suites finies d'éléments non nuls de  $A$  et de  $B$ , alternées,

$w = a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_\ell b_\ell$  avec  $a_i \in A$  et  $b_i \in B$ , et pour tout  $i \in \{2, \dots, \ell\}$ ,  $a_i \neq 1$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $b_i \neq 1$ .

Produit de concaténation réduction : il suffit de l'écrire.

Le *produit libre* des groupes  $A$  et  $B$  est  $A * B$  muni du produit de concaténation réduction.

**Exemple 68**  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq F_2$ .

**Exemple 69**  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

## 17 Actions du groupe libre

### 17.1 Plan hyperbolique

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}_2)$$

avec l'application qui à une matrice fait correspondre l'homographie associée.

**Exemple 70**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha: z \mapsto \frac{z}{2z+1} \quad \text{et} \quad \beta: z \mapsto z+2$$

$$\mathcal{D} := \{z, \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ et } |z| < 1\},$$

alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\beta^k(\mathcal{D}) \subset \mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{D}$ .

De même pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\alpha^k(\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ .

Argument du ping-pong :  $F_{\{a,b\}} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$  qui fait  $a \mapsto A \mapsto \alpha$  et  $b \mapsto B \mapsto \beta$  est injectif.

**Corollaire 71** Le sous-groupe de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  engendré par les matrices  $A$  et  $B$  définies dans l'exemple est libre, et  $\{A, B\}$  est une base.

A travers l'isomorphisme  $\varphi$ ,  $F_2$  agit sur le plan hyperbolique par isométries.

### 17.2 Action sur les arbres

Grphe de Cayley : soient  $G$  groupe et  $S \subset G$  une partie génératrice. On note  $G$  les sommets du graphe. Les arêtes sont orientées et étiquetées :  $v \xrightarrow{s} vs$ .

Le groupe  $G$  agit sur le graphe  $\mathrm{Cayley}(G, S)$  par multiplication à gauche :  $g \in G$ ,  $v$  un sommet, alors  $g \cdot v = gv$  et  $g \cdot (v \xrightarrow{s} vs) = gv \xrightarrow{s} gvs$ . C'est une action par isomorphisme de graphes orientés étiquetés.

Remarquons que le graphe de Cayley est connexe puisque  $S$  est une partie génératrice de  $G$ .

**Définition 72** Un *arbre* est un graphe connexe sans circuit.

**Proposition 73** Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet,  $\mathrm{Cayley}(F_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$  est un arbre.

$F_{\mathcal{A}}$  agit sur  $T_{\mathcal{A}} = \mathrm{Cayley}(F_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ .  $F_{\mathcal{A}}$  agit sur son arbre de Cayley par isomorphisme librement.

**Théorème 74 (Serre, 1968)** Un groupe qui agit librement sur un arbre est libre.

On peut mettre une distance sur  $\mathrm{Cayley}(G, S)$  : si  $u, v$  sont des sommets  $d(u, v)$  est le nombre minimal d'arêtes qui les séparent.

Pour le groupe libre  $F_{\mathcal{A}}$  et son arbre de Cayley, on a

$$d(u, v) = |u^{-1}v|_{\mathcal{A}}.$$

## 18 Groupe fondamental d'un graphe

Un graphe  $\Gamma = (V, E, i, t, \bar{\cdot})$  est constitué d'un ensemble  $V$  de sommets, d'un ensemble  $E$  d'arêtes,  $i, t: E \rightarrow V$  des applications d'incidence et  $\bar{\cdot}: E \rightarrow E$  une involution sans point fixe telle que  $i(\bar{e}) = t(e)$ . Une orientation de  $\Gamma$  est un choix de  $E^+ \subset E$  tel que  $E = E^+ \cup \overline{E^+}$ . Une arête non orientée est une paire  $\{e, \bar{e}\}$ .

Un chemin d'arêtes est un mot  $e_1 \cdots e_\ell$  sur  $E$  tel que pour tout  $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $t(e_k) = i(e_{k+1})$ , c'est une boucle si de plus  $t(e_\ell) = i(e_1)$ , c'est un circuit si de plus pour tout  $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $e_k \neq \bar{e}_{k+1}$  et  $e_\ell \neq \bar{e}_1$ . Un graphe est connexe si pour tout couple de sommets il existe un chemin d'arêtes allant de l'un à l'autre.

La *caractéristique d'Euler* d'un graphe fini  $\Gamma$  est

$$\chi(\Gamma) = \text{Card } V - \frac{1}{2} \text{Card } E.$$

**Proposition 75** Un graphe fini connexe est un arbre si, et seulement si,  $\chi(\Gamma) = 1$ .

Réalisation topologique d'un graphe :

$[0,1] \times E \cup V / \sim$ , où  $(t, e) \sim (1 - t, \bar{e})$ ,  $(0, e) \sim i(e)$  et  $(1, e) \sim t(e)$ .

**Théorème 76** Le groupe fondamental d'un graphe connexe est un groupe libre.

*Preuve.*

- De la topologie à la combinatoire.

Une arête  $e \in E$  est un chemin  $\gamma_e: [0,1] \rightarrow \Gamma$ ,  $t \mapsto \gamma_e(t) : [(t, e)]$ ,  $\gamma_e(0) = [i(e)]$  et  $\gamma_e(1) = [t(e)]$ . Par concaténation, un chemin d'arête est un chemin.  $\gamma \cdot \gamma': [0,1] \rightarrow \Gamma$ ,  $t \mapsto \gamma(2t)$  si  $t \leq 1/2$  et  $t \mapsto \gamma'(2t - 1)$  si  $t \geq 1/2$ , avec  $\gamma(1) = \gamma'(0)$ .

**Proposition 77** Tout chemin (topologique) dans  $\Gamma$  allant d'un sommet à un autre est homotope relativement à ses extrémités à un chemin d'arêtes.

*Preuve.*

Soit  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Gamma$  un chemin,  $\gamma(0) = v_0 \in V$  et  $\gamma(1) = v_1 \in V$ . La division barycentrique de  $\Gamma$  est l'ensemble  $V^{1/2} = V \cup \{(e, 1/2) \mid e \in E\}$ .  $\square$

**Lemme 78** Il existe  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  tels que pour tout  $k$ ,  $\gamma(t_k) \in V^{1/2}$  et pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1}[$ ,  $\gamma(t) \in V^{1/2} \implies \gamma(t) = \gamma(t_k)$ .

*Preuve.*

Construction par récurrence des  $t_k$  :  $t_{k+1} = \inf\{t \in [t_k, 1], \gamma(t) \in V^{1/2} \setminus \{\gamma(t_k)\}\}$ , ou  $t_{k+1} = 1$  si l'ensemble sur lequel on prend l'infimum est vide. Par continuité,  $v_{k+1} = \gamma(t_{k+1}) \in V^{1/2}$  et  $(v_{k+1} \neq v_k$  (sauf peut-être si  $t_{k+1} = 1$ )).  $\gamma$  est continu sur  $[0,1]$ , donc uniformément continu, donc pour  $\varepsilon = 1/2$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tous  $t, t'$ ,  $\leq t' - t \leq \eta$  implique  $d(\gamma(t'), \gamma(t)) < 1/2$ , donc  $t_{k+1} - t_k > \eta$ . Ceci implique que  $n \leq 1/\eta$  qui est fini.  $\square$

**Lemme 79** Pour tout  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,  $\gamma([t_k, t_{k+1}])$  est contractile.

*Preuve.*

Si  $v_k = \gamma(t_k)$  est le milieu d'une arête  $e$ , alors  $\gamma([t_k, t_{k+1}[) \subset \overset{\circ}{e}$  et  $]0, 1[ \sim \overset{\circ}{e}$ . Si  $\gamma(t_k)$  est un sommet de  $V$ ,  $\gamma([t_k, t_{k+1}[)$  est inclus dans l'étoile (link) autour de  $v_k$  :

$$\text{link}(v_k) = \bigcup_{\substack{e \in E \\ i(e) = v_k}} [0, 1/2] \times \{e\}$$

qui est contractile. □

**Lemme 80** Pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , le chemin  $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}[}$  est homotope relativement à ses extrémités à un chemin de demi-arête.

*Preuve.*

Il suffit d'écrire l'homotopie qui contracte l'image en gardant le sommet d'arrivée. □

Nous avons donc démontré en recollant les  $n$  homotopies que tout chemin entre deux sommets est homotope à un chemin de demi-arêtes.

**Lemme 81** Tout chemin de demi-arêtes est homotope à un chemin d'arêtes.

*Preuve.*

$e \cdot \bar{f}$  deux demi-arêtes avec  $t(e) = m$  milieu d'une arête. Si  $e \neq \bar{f}$ , alors  $e \cdot \bar{f}$  est une arête. Si  $e = \bar{f}$ , alors on peut homotoper pour réduire le chemin de demi-arêtes. □

- La partie topologique est laissée au lecteur.

**Proposition 82** L'ensemble des boucles d'arêtes basées en  $v_0 \in V$  muni de la concaténation-réduction est un groupe libre.

*Preuve.*

Soit  $T$  un sous-arbre maximal de  $\Gamma$ .

**Lemme 83**  $T$  contient tous les sommets de  $\Gamma$ .

*Preuve.*

Construction de  $T$  par récurrence en ajoutant des arêtes (on utilise le fait que  $\Gamma$  est connexe). Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$  qui ne sont pas dans  $T$ ,  $\text{Card } \mathcal{A} = 1 - \chi(\Gamma)$  ( $\mathcal{A}$  est un choix d'orientation pour chacun des arêtes hors de  $T$ ). Chaque sommet  $v \in V$  est relié à  $v_0$  par un unique chemin d'arête réduit de l'arbre  $T$  :  $t_v$  chemin de  $v_0$  à  $v$  dans  $T$ .  $W := \{t_{i(e)} e t_{t(e)}^{-1}, e \in \mathcal{A}\}$ . Les éléments de  $W$  sont des boucles basées en  $v_0$ . □

**Lemme 84**  $W$  engendre les boucles basées en  $v_0$ .

*Preuve.*

Soit  $\gamma = e_1 \cdots e_\ell$  une boucle d'arête basée en  $v_0$ ,  $\gamma = w_{e_1} \cdots w_{e_\ell}$ .  $w_e = t_{i(e)} e t_{t(e)}^{-1}$ . Remarquons que pour  $e \in E(T)$ ,  $w_e = \varepsilon$ . En effaçant les  $w_e$  pour  $e \notin \mathcal{A}$ , nous obtenons mot sur  $W^{\pm 1}$ . □

**Proposition 85**  $\pi_1(\Gamma, v_0)$  est libre sur  $W$ .

*Preuve.*

$w_1, w_2, w_3 \in W^{\pm 1}$ ,  $w_1 w_2 \neq 1$  et  $w_2 w_3 \neq 1$ . Alors l'arête  $e \in \mathcal{A}^{\pm 1}$  qui définit  $w_2$  ne s'efface pas dans la concaténation réduction  $w_1 w_2 w_3$ . En effet l'effacement est exactement  $t_{i(e_2)}$  et  $t_{t(e_2)}^{-1}$  où  $w_2 = w_{e_2}$ .  $\square$

Revêtement universel.

Le revêtement universel d'un graphe est un graphe.

## 19 Perspectives

1.  $\pi_1(S_{g,1}) = F_{2g}$  où  $S_{g,1}$  est une surface de genre  $g$  dans laquelle on a percé un trou.
2. Etude des homéomorphismes de  $S_g$  (Thurston). Ceci se ramène à l'étude des automorphismes du groupe fondamental  $\pi_1(S_g)$ , qui est "presque" libre.
3. Version combinatoire de l'actions sur le plan hyperbolique : groupes hyperboliques (Gromov).
4. (Rips) Arbres réels : espaces métriques sans boucles, connexes. Les points de branchement ne sont pas nécessairement discrets.
5. (Bass-Serre) Etude des groupes agissant sur un arbre. Alors  $G$  se décompose en un produit libre des stabilisateurs de sommets amalgamés sur les stabilisateurs d'arêtes. Décomposition JSJ des variétés de dimension 3 et des groupes.
6. Combinatoire des mots infinis. Substitutions, pavages (Penrose).
7. (Makanin) Equations dans les groupes libres. Algorithme très compliqué.
8. Théorie du premier ordre d'un groupe libre.



## Table des matières

<b>I Daniel Matignon – Introduction à la géométrie des surfaces</b>	<b>2</b>
<b>1 Surfaces</b>	<b>2</b>
1.1 Variétés . . . . .	2
1.2 Orientation . . . . .	2
<b>2 Homotopie</b>	<b>3</b>
2.1 Introduction . . . . .	3
2.2 Homotopie des espaces topologiques . . . . .	3
<b>3 Groupe fondamental</b>	<b>4</b>
3.1 Homotopie des lacets . . . . .	4
3.2 Groupe fondamental . . . . .	4
3.3 Propriétés . . . . .	4
3.4 Exemples . . . . .	6
<b>4 Théorème de Van Kampen</b>	<b>6</b>
<b>5 Surfaces</b>	<b>6</b>
5.1 Sphères et tores . . . . .	6
5.2 Möbius et plan projectif . . . . .	7
5.3 Bouteille de Klein, $KB^2$ . . . . .	7
5.4 Découpages . . . . .	7
<b>6 Homologie</b>	<b>7</b>
6.1 Définition abstraite . . . . .	7
6.2 Cas des surfaces . . . . .	8
<b>7 Caractéristique d'Euler-Poincaré</b>	<b>8</b>
7.1 Définition abstraite . . . . .	8
7.2 Surfaces . . . . .	8
<b>II Frédéric Palési – Géométrie hyperbolique, surfaces hyperboliques</b>	<b>9</b>
<b>8 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>9 Demi-plan de Poincaré</b>	<b>10</b>
<b>10 Classification des isométries de <math>\mathbb{H}</math></b>	<b>14</b>
<b>11 Groupes Fuchsien</b>	<b>15</b>

---

<b>12 Surfaces hyperboliques</b>	<b>15</b>
<b>III Thierry Coulbois – Groupes libres</b>	<b>16</b>
13 Mots, mots réduits	16
14 Propriété universelle	18
15 Réduction de Nielsen	18
16 Variations	20
16.1 Présentation d'un groupe . . . . .	20
16.2 Produit libre . . . . .	20
17 Actions du groupe libre	21
17.1 Plan hyperbolique . . . . .	21
17.2 Action sur les arbres . . . . .	21
18 Groupe fondamental d'un graphe	22
19 Perspectives	24
Table des matières	25