Fibrations localement triviales

Sujet de TER pour un ou deux étudiants en mathématiques fondamentales

Anne Pichon

Considérons une application polynomiale de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, par exemple $f(x, y) = x^2 - y^2$, et dessinons ses fibres, c'est-à-dire les ensembles $f^{-1}(t)$, où $t \in \mathbf{R}$.

On constate qu'excepté la fibre $f^{-1}(0)$, dite spéciale, qui est réunion de deux droites, toutes les autres fibres se ressemblent : ce sont des hyperboles, deux à deux difféomorphes.

Si vous regardez d'autres applications polynomiales, par exemple $x^2 + y^2$ ou bien $x^2 + y^3$, vous ferez empiriquement le même constat : il y a un nombre fini de fibres spéciales.

Mieux, en dehors de la fibre spéciale $f^{-1}(0)$, on peut démontrer que l'application se comporte localement comme la projection d'un produit sur l'un de ses facteurs : pour tout $t_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, il existe un voisinage ouvert U de t_0 dans $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ tel que $f^{-1}(U)$ soit difféomorphe à $U \times f^{-1}(t_0)$ par un difféomorphisme qui envoie la fibre $f^{-1}(t)$ sur $\{t\} \times f^{-1}(t_0)$. On dit qu'en dehors de sa fibre spéciale, h est une fibration localement triviale.

L'objet de ce TER est une approche de la notion de fibration localement triviale, dans un contexte plus général: nous étudierons des applications différentiables $f : M \to N$ où M et N sont des variétés différentiables, éventuellement à bord ($\mathbf{R}^n$, mais aussi cercles, tores, disques, courbes, etc...).

On se familiarisera avec les notions de valeur critique et de valeur régulière, et l'on étudiera le théorème de Sard (trois premiers chapitres de [Mi]).

On étudiera ensuite le théorème d'Ehresmann, qui donne une condition suffisante pour qu'une application entre deux variétés soit une fibration localement triviale ([AER]).

Le TER utilisera dans sa premire partie des outils du cours de topologie du deuxième semestre (variété différentiable, d'espace tangent, de différentielle), mais il est auto-contenu : le cours de topologie n'est bien sûr pas un prérequis.

Références

[Mi] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, 1969, The University Press of Virginia.

[AER] R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Applied Mathematical Sciences 75, Springer-Verlag.