MASTER II, MATH. FONDA., THÉMATIQUE : GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ET ARITHMÉTIQUE

Equipe pédagogique : Stéphane Ballet, Julien Keller, David Kohel, Marc-Hubert Nicole, Xavier Roulleau, Erwan Rousseau.

Deux semaines de cours intensifs (36h CM)

1) Algèbre Commutative et Théorie des Corps (18h CM, Xavier Roulleau)
— Théorie des corps,
— Produit tensoriel,
— Premiers, valuations et DVR,
— Diviseurs de Weil et de Cartier

2) Analyse complexe, Fonctions holomorphes de plusieurs variables, (18h CM, Julien Keller)
— Principe du maximum pour les fonctions holomorphes,
— Théorèmes de Montel et Köbe,
— Fonctions harmoniques, sous-harmoniques,
— Variétés réelles (atlas, triangulation...),
— Notions de genre, de courbure de Gauss pour les surfaces,
— Théorème de Gauss-Bonnet,
— Courbure Riemannienne

Premier semestre (75h CM)

1) Courbes algébriques, courbes elliptiques (25h CM, Stéphane Ballet).

Dans ce cours, nous nous proposons d'introduire les notions fondamentales (place, valuation discrète, anneau de valuation, corps de classe résiduel, diviseurs/diviseurs principaux, espaces de Riemann-Roch, groupe des classes, adèle, différentielle de Weil, diviseur canonique etc. . .) de la théorie des corps de fonctions algébriques en une variable avec comme objectif d'établir le Théorème de Riemann-Roch. En particulier, nous illustrerons ces notions sur des courbes classiques définies sur des corps finis (courbes elliptiques, hyperelliptiques de genre 2 etc...) par étude directe ainsi que grâce au logiciel de calcul formel Magma.

Bibliographie principale :

Henning Stichtenoth, Algebraic function fields and codes, GTM, Springer, 2009.

Daniel Perrin, Géométrie algébrique - une introduction.

2) Courbes modulaires (25h CM, Marc-Hubert Nicole)

Le cours se divisera en trois parties.

La première partie (environ la moitié du cours) consistera en l'étude des courbes elliptiques. Nous commencerons par la théorie analytique des courbes elliptiques ; nous poursuivrons par la théorie algébrique. Un point de départ sera l'équation de Weierstrass (à laquelle aboutira S. Ballet dans son cours grâce au développement du théorème de Riemann-Roch, dont l'équation explicite de Weierstrass constitue une application élégante).

La seconde partie (environ un quart du cours) consistera en l'étude des courbes modulaires : structures de niveau et présentation analytique sur les complexes des courbes modulaires vues comme espaces de modules de courbes elliptiques. On définira les formes modulaires classiques.

La troisième partie (environ un quart du cours) consistera en l'étude d'analogues des courbes elliptiques et des courbes modulaires sur les corps de fonctions sur des corps finis : la théorie analytique des modules de Drinfeld de rang 2 (et un peu de théorie algébrique, le temps permettant) ; suivie de la théorie analytique de la courbe modulaire de Drinfeld qui est l'espace de modules des objets précédents. Le but avoué de cette partie "analogique" est de donner un cadre théorique nettement plus accessible mais encore suffisamment riche qui permet d'explorer des questions ouvertes, ou encore de faire des calculs sur machine nouveaux qui deviendront accessibles dès la fin du cours.

3) Uniformisation de Riemann et notions de positivitè (25h CM, Julien Keller).

Le théorème d'uniformisation de Riemann est un résultat de base dans la théorie des surfaces de Riemann, c'est-à-dire des variétés complexes lisses de dimension 1 (complexe).
Il assure que toute surface de Riemann simplement connexe peut être mise en correspondance biholomorphe avec l'une des trois surfaces suivantes : le plan complexe, le disque unité de ce plan, ou la sphère de Riemann, c'est-à-dire la droite projective complexe $\mathbb{CP}^1$.
Nous prouverons ce résultat par une méthode analytique en étudiant une équation au Laplacien. Ce sera aussi l'occasion de travailler avec les notions de fibrés en droites à courbure positive, de fibrés amples, et de voir, si le temps le permet, une version du théorème de plongement de Kodaira pour les surfaces de Riemann compactes. Ce théorème de plongement établit un pont entre géométrie différentielle et géométrie algébrique complexe.

Second semestre (50h CM+Mémoire)

1) Classification des surfaces algébriques (25h CM, Erwan Rousseau)
Ce cours est une introduction à la classification des surfaces algébriques complexes. Nous y étudierons notamment :
— les éclatements et les applications birationnelles entre surfaces,
— le diviseur canonique et la dimension de Kodaira,
— les fibrations rationnelles ou elliptiques,
— divers exemples : surfaces abéliennes, surfaces K3, surfaces d'Enriques, surfaces bi-elliptiques,
— la classification d'Enriques et une introduction à la théorie de Mori,

2) Surfaces elliptiques (25h CM, David Kohel)

— Courbes sur un corps de fonctions et surfaces fibrées sur une courbe,
— Surfaces elliptiques modulaires, et diviseurs sur une surface,
— groupe de Néron-Severi et de Mordell-Weil,
— classification de Kodaira des fibres singulières,
— classification des surfaces elliptiques,
— surfaces elliptiques rationnelles.

Cours de l'école doctorale

Feuilletages sur des surfaces (Jorge Pereira, Chaire Morlet et IMPA)

Contrôle des connaissances : Pour chaque cours il y aura un examen comportant une épreuve écrite.