

MASTER 1 - MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS TER

Titre : La fonction φ de Minkowski

Encadrant : Laurent Regnier

Lieu : Luminy, Saint-Charles

Description.

La fonction φ de Minkowski, également connue sous le nom de « escalier glissant du diable » (slippery devil staircase) est un exemple de fonction *singulière* : continue, dérivable presque partout, de dérivée presque partout nulle mais néanmoins non constante. En fait elle est strictement croissante, donc bijective de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, ce qui la différencie d'autres exemples de fonction singulière comme la fonction de Cantor qui est un escalier du diable mais moins glissante car localement constante.

Elle est définie de façon complètement constructive en utilisant deux représentations des réels : les fractions continues et le développement dyadique.

Elle est dotée de multiples propriétés remarquables, par exemple le fait qu'il existe un sous-ensemble mesurable de l'intervalle $[0, 1]$, de mesure 0 qui est envoyé sur un ensemble de mesure 1.

L'objet du TER sera, après avoir bien compris la théorie élémentaire des fractions continues et des suites de Farey, d'étudier la définition de cette fonction, possiblement d'implémenter un algorithme la calculant sur les rationnels, puis de retrouver certains résultats à son sujet.

Références.

A. Denjoy, « Sur une fonction réelle de Minkowski », J. Math. Pures Appl., vol. 17, 1938, p. 105-151
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6459126x/f117.item>

Linus Vepstas, « The Minkowski Question Mark and the Modular Group $SL(2, \mathbb{Z})$ (Expository) », 2004 (révisé en 2014)

<http://www.linus.org/math/chap-minkowski.pdf>