Marches aléatoires en environnement aléatoire

Proposition de cours de M2 pour Ceps 2020-2021

P. Mathieu (I2M)

Résumé:

La suite des positions, $X(n)$, de la marche aléatoire simple sur un graphe tel que Z^2 (c'est-à-dire sur une grille régulière de dimension deux et la marcheuse part de l'origine puis choisi successivement de sauter sur l'un de ses quatre voisins choisi uniformément 'au hasard') est décrite par la loi des grands nombres: $X(n)/n$ tend vers 0 et par le théorème de la limite centrale: la loi de $X(n)/\sqrt{n}$ converge vers une loi gaussienne, voire le principe d'invariance: la trajectoire correctement normalisée converge vers un mouvement brownien. Ce comportement est *diffusif*.

La suite des positions de la marche aléatoire simple sur un graphe tel qu'un amas de percolation est également diffusive et un objectif du cours sera de démontrer ce résultat. Une telle marche aléatoire sur un amas de percolation est un exemple de *marche aléatoire avec conductances aléatoires:* notre marcheuse se déplace sur une grille de dimension d en choisissant à chaque instant la direction dans laquelle se déplacer au hasard, suivant des probabilités non-uniformes et elles-mêmes aléatoires. La donnée des probabilités de saut dans les différentes directions - la donnée du graphe dans le cas de la percolation - constitue un *environnement aléatoire.*

De tels modèles sont pertinents pour différents problèmes issus de la physique en particulier pour étudier la conduction électrique dans les semi-conducteurs dopés, e.g. [2]. Un semi-conducteur dopé contient des impuretés au voisinage desquelles les électrons viennent de localiser qui jouent le rôle de l'environnement. Le mouvement des électrons est correctement modélisé par une marche aléatoire. L'étude du modèle mathématique confirme en partie les calculs de Mott (prix nobel 1977). Ces modèles sont aussi utilisés pour comprendre les phénomènes de diffusion dans un milieu hétérogène (comme de l'eau dans les grains de café d'un percolateur).

Les outils mathématiques utilisés pour décrire les marches aléatoires avec conductances aléatoires relèvent des probabilités: chaînes de Markov, martingales … cf [1] mais il y a aussi un lien avec la théorie ergodique (via le théorème du même nom) et une forte analogie avec la théorie de l'homogénéisation en EDP (en particulier on introduit des espaces de Sobolev associés à une chaîne de Markov).
Ces outils permettent également de replacer l'étude des marches aléatoires avec conductances aléatoires dans le cadre plus général de l'étude des fonctionnelles additives de chaînes de Markov.

A la fin du cours nous verrons aussi comment les résultats sur le comportement diffusif de marches aléatoires, et plus généralement de fonctionnelles additives de chaînes de Markov, permettent d'obtenir des informations sur le comportement hors-équilibre de certains systèmes via des relations dites de *fluctuation-dissipation*. Les relations de fluctuation-dissipation sont au coeur de certaines méthodes récemment introduites [3] pour la prédiction du climat. (Méthodes qui ne sont pas encore parfaitement bien justifiées d'un point de vue mathématique mais semblent néanmoins prometteuses. Les théorèmes du cours donnent une piste pour une compréhension rigoureuse des méthodes sus-mentionnées.)

Références:

[1] Kipnis-Varadhan: Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions.
Communications in Math Physics, 1986.
[2] Gantert-Faggionato-Salvi: Einstein relation and linear response in one-dimensional Mott variable-range hopping.
Annales de l'IHP, 2019.
[3] Lucarini-Lunkeit-Ragone: Predicting Climate Change Using Response Theory: Global Averages and Spatial Patterns.
Journal of statistical physics, 2017.