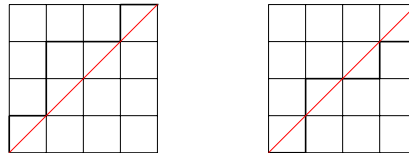


TER : combinatoire analytique des chemins discrets

Encadré par Luigi Santocanale (pour un, deux ou trois étudiants)

29 janvier 2019

Un chemin discret dans le plan est une ligne polygonale reliant des points de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Un exemple important de famille de chemins discrets est donné par les chemins de Dyck (de demi-longueur n). Il s'agit de chemins qui démarrent au point $(0, 0)$, se terminent au point (n, n) , qui restent toujours au dessus de la diagonale, qui avancent par incréments successifs entiers ou bien de la coordonnée x , ou bien de la coordonnée y . La figure ci dessous exemplifie un chemin de Dyck sur la gauche, et un non-chemin-de-Dyck sur la droite. C'est bien connu que les



chemins de Dyck de demi-longueur n sont comptés par les nombres de Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Un problème récurrent de la combinatoire énumérative est de compter les chemins discrets satisfaisant des propriétés données, en fonction de certains paramètres (par exemple, la demi-longueur dans le cas des chemins de Dyck) ou de statistiques de ce chemins (ex : hauteur moyenne ...).

Les techniques de comptages sont multiples : récurrences, preuves bijectives, algèbre des séries formelles, etc. Le but du TER est de se familiariser (et, possiblement, arriver à maîtriser) avec des techniques de comptage originant de l'analyse dont la particularité est de jeter un pont entre monde discret et monde continu.

Le point de départ du travail (et aussi d'arrivée) sera la lecture de l'article *Basic Analytic Combinatorics of Directed Lattice Paths*, par Cyril Banderier and Philippe Flajolet, *Theoretical Computer Science* 281 :1-2 (2002), pp. 37-80. Vous pouvez trouver une copie de cet article à l'adresse ci-dessous :

— <http://pageperso.lis-lab.fr/~luigi.santocanale/TERPaths/DOCS/BaF101.pdf>

Au besoins, cette lecture sera complétée par d'autres lectures, par par exemple le livre par Bergeron, Labelle, Leroux, que vous pouvez visionner à cette adresse :

— <http://pageperso.lis-lab.fr/~luigi.santocanale/TERPaths/DOCS/BLL.pdf>