Dierk Schleicher, Aix–Marseille Université
dierk.schleicher@univ-amu.fr

Le problème de Collatz $3n+1$, et d'autres itérations surprenantes sur les entiers

Le « problème Collatz $3n+1$ » est l'une des énigmes classiques en mathématiques : commencez par n'importe quel nombre entier positif n, et effectuez l'opération suivante infiniment souvent : si n est pair, remplacez n par $n/2$, et si n est impair, remplacez-le par $3n+1$, et recommencez. Exemple : $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \ldots$. Beaucoup de mathématiciens ont essayé des milliards de nombres, et ils ont toujours atterri sur le cycle $4 \to 2 \to 1 \to 4 \ldots$, mais personne ne comprend pourquoi. Cela reste l'un des mystères des mathématiques contemporaines.

Voici un exemple non moins amusant : considérons la liste des fractions

$$17/91, 78/85, 19/51, 23/38, 29/33, 77/27, 95/23, 77/19, 1/17, 11/13, 13/11, 15/2, 1/7, 55/1$$

et commencez le processus suivant : commencez par 2 et trouvez la première de ces fractions qui peut être multipliée par ce nombre donnant un entier (dans ce cas, 15/2) et calculez le produit (dans ce cas, 15). Répétez cette étape avec le nouveau nombre 15 : la première fraction correspondante est 55/1 et nous obtenons $15 \cdot 55$. Au tour suivant, la fraction 13/11 donne $13 \cdot 15 \cdot 5$, et ainsi de suite. Cela donne une chaîne infinie de nombres, et, étonnamment, ils contiennent une infinité de puissances de deux, et leurs exposants sont exactement les nombres premiers dans l'ordre croissant ! En d'autres termes, la courte liste innocente de fractions sait tout sur les nombres premiers !

Le but de ce projet est de comprendre cette liste miraculeuse de fractions et de découvrir que ce n'est pas miraculeux après tout, de produire de telles listes de fractions avec d'autres propriétés intéressantes et d'explorer leurs relations avec le problème de Collatz.

Littérature :

John Conway, “Fractran”. Manuscript.

John Conway, “On unsettleable arithmetic progressions”. Amer. Math. Monthly, March 2013.

..